

MAY 29 1935

5. FOLGE, 1935, BAND 22, HEFT 7

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-  
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,  
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 414. Band

## Kuratorium:

W. Gerlach    F. Paschen    M. Planck  
R. W. Pohl    A. Sommerfeld    M. Wien

Unter Mitwirkung  
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft  
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.  
M. PLANCK, Berlin

Mit 16 Abbildungen im Text



LEIPZIG, VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

Redaktionsschluß am 20. April 1935

V  
2  
2  
1  
9  
3  
5  
XUM

## Inhalt

	Seite
R. v. Hirsch - Planegg bei München, Temperatur und Entropie der Lichtquanten. (Mit 2 Figuren) . . . . .	609
A. Sommerfeld und A. W. Maue - München, Verfahren zur näherungsweisen Anpassung einer Lösung der Schrödinger- an die Diracgleichung	629
Rasmus E. H. Rasmussen - Kopenhagen, Radiometerkraft und Apparaturdimensionen. (Mit 7 Figuren) . . . . .	643
Arnold Guntsch - Stockholm, Über die Berechnung der Bandenkonstanten für die zweite positive Stickstoffgruppe. (Mit 2 Figuren) . . . . .	657
E. Grüneisen und H. Hoyer - Marburg (Lahn), Geschwindigkeit elastischer Wellen im Quecksilberkristall und die daraus berechnete charakteristische Temperatur. (Mit 5 Figuren) . . . . .	663
Nikolai Kemmer - Zürich, Über die elektromagnetische Masse des Diracelektrons . . . . .	674

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechtes der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

1935 erscheinen die Bände 22–24 der 5. Folge. Bezugspreis je Band RM. 26.—, mit Porto RM. 27.20 im Inland, RM. 28.— im Ausland. Mitgliedern der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und der Gesellschaft für technische Physik wird ein Vorzugspreis gewährt.

Die Zeitschrift kann durch jede Buchhandlung, in Ausnahmefällen auch durch den Verlag bezogen werden.

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn **Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grüneisen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33**, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten. Die **Zeichnungen** sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

seite  
309  
329  
343  
357  
363  
374

die  
der  
eht  
tes  
der  
and  
ern  
che

uch  
ten  
of.

in  
per-  
ren

ach  
te"

V  
2  
2  
?

1  
9  
3  
5



# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE · BAND 22 · HEFT 7 · MAI 1935

## Temperatur und Entropie der Lichtquanten

Von R. von Hirsch

(Mit 2 Figuren)

Inhalt: Es wird versucht, die thermodynamische Theorie der Strahlung weiterzuführen. Es ergeben sich insbesondere neue Beziehungen für die Lichtbrechung in Metallen und die natürliche Breite der Spektrallinien.

Die frühesten quantentheoretischen Arbeiten von Planck, in denen das elementare Wirkungsquantum zum erstenmal vorkommt, unterscheiden sich von der späteren Entwicklung der Theorie durch ihren ausgesprochen thermodynamischen Standpunkt. Schon die Titel dieser Abhandlungen beweisen dies:

1900 und 1901 „Über irreversible Strahlungsvorgänge“<sup>1)</sup>;

1901 „Entropie und Temperatur strahlender Wärme“.

In der späteren Entwicklung, nach 1906, treten solche thermodynamischen Begriffe hinter atomistischen Vorstellungen zurück, die insbesondere die eigentliche Lichtquantenhypothese beherrschen. Dies ist vielleicht der Grund, daß eine Anwendung des zweiten Hauptsatzes auf die Behandlung des Photoeffekts und später auf den Comptoneffekt niemals durchgeführt wurde, obwohl die Verwandlung thermischer Energie in Arbeit deutlich vorliegt. Denn in beiden Fällen wird Licht, also im Sinn der angeführten Arbeiten von Planck, Temperaturstrahlung verwendet, um Elektronen frei zu machen und ihnen eine geordnete fortschreitende Bewegung zu erteilen. Man hat also den klaren Fall der Verwandlung von Wärme in Arbeit. Hier wollen die folgenden Entwicklungen den verlassenen Weg thermodynamischer Schlüsse wieder aufsuchen.

Wir gehen also von der nicht bestreitbaren Tatsache aus, daß die Auslösung von Elektronen im Compton- und Photoeffekt Arbeitsleistungen der Temperaturstrahlung sind und daher der Anwendung des zweiten Hauptsatzes unterworfen werden können. Gegen ein solches Verfahren gibt es allerdings gewichtige Einwände: Es ist bekannt, daß beide Effekte ausgesprochene Quanteneffekte sind, d. h. daß die maßgebenden Gesetze sich auf das einzelne Quant und nicht

1) Ann. d. Phys. 1. S. 69. 1900; 1. S. 719. 1900; 6. 818. 1901.

auf den ganzen Lichtstrahl beziehen, während umgekehrt die Temperatur nur für die schwarze Strahlung oder für einen derselben entnommenen homozentrischen und monochromatischen Strahl definiert ist. Die bekannte Formel für die Temperatur

$$(1) \quad \vartheta = \frac{h\nu}{k} \frac{1}{\log \left( \frac{2h\nu^3 F n^2 \Omega}{c^2 J} + 1 \right)}$$

kann nicht etwa, indem  $J = h\nu$  gesetzt wird, auf einzelne Quanten angewendet werden. Denn die Größen  $F$  und  $\Omega$  verlieren dann ihren Sinn. Ein Quant ist ganz bestimmt nicht ein elementares Strahlenbündel von der Öffnung  $\Omega$  und Brennfläche  $F$ , das sich mit wachsender Entfernung vom Ursprung in seinem Winkelraum ausbreitet. Wir haben also eine Temperaturdefinition nur für den Strahl, dagegen eine Arbeitsleistung durch das einzelne Quant und zwischen beiden zunächst keine Brücke. Trotzdem ist nicht zu leugnen, daß ein nach Planck definierter homozentrischer und monochromatischer Strahl von der Temperatur  $\vartheta$  den Compton- und Photoeffekt bewirken kann. Der zweite Hauptsatz muß also anwendbar sein, die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Einzelquant und Strahl darf einer späteren Klärung vorbehalten bleiben.

I. Obwohl wesentliche Aufschlüsse erst aus der Anwendung auf den Photoeffekt hervorgehen werden, schicken wir der Vollständigkeit halber die einfachere Behandlung des Comptoneffekts voraus:

Wir haben hier die bekannte Energiegleichung

$$h\nu = h\nu' + A,$$

wenn wir die dem Elektron erteilte Bewegungsenergie einschließlich einer etwa auftretenden Austrittsarbeit mit  $A$  bezeichnen. Hierdurch entsteht durch einfache Umstellung

$$(2) \quad \frac{A}{h\nu} = \frac{\nu - \nu'}{\nu},$$

da  $h\nu$  die Energie des einfallenden Elektrons ist, so hat diese Gleichung bereits die Form des zweiten Hauptsatzes. Nimmt man die Plancksche Formel (1) für die Temperatur einer Strahlung von der Periode  $\nu$  hinzu, so ist die Ausdehnung der Gl. (2) zu

$$(2') \quad \frac{A}{h\nu} = \frac{\vartheta - \vartheta'}{\vartheta},$$

wie sie der zweite Hauptsatz verlangt, nur noch an die Bedingung geknüpft, daß das Argument des Logarithmus in (1) sich bei dem Vorgang nicht ändere, d. h. da beim Comptoneffekt  $n$  und  $F$  unverändert bleiben,  $J = N h\nu$  ist, das  $\nu^2 \Omega$  bei der Verwandlung der

Quanten konstant bleibe. Es soll also die Öffnung des Strahls bei der Comptonstreuung umgekehrt proportional dem Quadrat der Schwingungszahl sich ändern. Dies ergibt in Verbindung mit der elementaren Theorie des Comptoneffekts eine Vergrößerung von  $\Omega$  im Verhältnis  $1: \left(1 + \frac{2A\lambda}{\lambda}\right)$ , wenn  $A\lambda$  die Verschiebung der Wellenlänge,  $\lambda$  die Wellenlänge der ursprünglichen Strahlung bedeutet. Da die gestreute Strahlung den ganzen Winkelraum um den Aufpunkt erfüllt, läßt sich diese Beziehung nur so prüfen, daß man aus der Streustrahlung einen Kegel mit der gleichen Öffnung ausblendet, die für die ursprüngliche Strahlung gewählt war. Dann wird innerhalb dieser Öffnung die spektrale Breite offenbar im gleichen Verhältnis verkleinert, wie die Öffnung bei konstanter Breite vergrößert würde, so daß also eine Verengung der verschobenen Linie beobachtet werden müßte. Da dieselbe aber aus anderen Gründen erheblich verbreitert ist, so entzieht sich dieser Effekt der Beobachtung.

II. Wichtiger werden die Folgerungen des thermodynamischen Ansatzes beim Photoeffekt, unter welchem wir hier ausdrücklich die reine lichtelektrische Auslösung von Elektronen ohne Phosphorescenz verstehen, wie sie bei Metallen vorliegt. Hier lautet die Energiegleichung

$$h\nu = A$$

entsprechend dem bekannten Gesetz von Einstein. Die Energie des Lichtquants verwandelt sich restlos in Arbeit, eine Strahlung von vermindertem  $\nu$ , also verringelter Temperatur, ist nicht vorhanden. Dieser Vorgang steht zunächst in klarem Widerspruch zum zweiten Hauptsatz; denn der Ausweg, der gestreuten Strahlung die Schwingungszahl Null zuzuschreiben und damit die Temperatur Null und Intensität Null, erscheint uns nicht gangbar. Will man die thermodynamischen Gesetze trotzdem retten, so muß man die Annahme aufgeben, daß sich der Photoeffekt ausschließlich an dem absorbierten Quant abspielt, und den Gesamtstrahl heranziehen, indem man die geforderte Kompensation für die Arbeitsleistung den im Metall sich fortpflanzenden Quanten zuschreibt. Die einfachste Lösung wäre die, daß die durch Absorption veranlaßte Verkleinerung von  $J$  in Gl. (1) gerade die erforderliche Temperaturabnahme ergeben würde. Um diese Möglichkeit zu prüfen, schreiben wir zunächst Gl. (1) in der Form

$$(1') \quad \vartheta = \frac{h\nu}{k \log \left( \frac{B}{N} + 1 \right)},$$

V  
2  
2  
1  
9  
3  
5  
XU

indem wir  $J = N h \nu$ , und  $B = \frac{2 F n^2 \nu^2 \Omega}{c^2}$  setzen. Das Plancksche Strahlungsgesetz erhält dann die Form

$$(3) \quad \frac{N}{B} = \frac{1}{e^{\frac{h \nu}{k \theta}} - 1}.$$

Ferner erinnern wir uns, daß  $\frac{dN}{N dx} = \alpha$  der Absorptionskoeffizient des Lichts in der photoelektrischen Substanz ist, und infolge der quantenhaften Natur des Vorgangs

$$\frac{A}{J} = - \frac{dN \cdot h \nu}{N h \nu}$$

sein muß. Demgemäß ergibt der zweite Hauptsatz

$$(4) \quad \frac{A}{J} = - \frac{dN}{N} = - \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{d\left(\frac{B}{N}\right)}{\left(\frac{B}{N} + 1\right) \log\left(\frac{B}{N} + 1\right)}.$$

Nun stellt die Beziehung  $B = \text{konst.}$ , wie bereits Planck ausgeführt hat, den Ausdruck des gewöhnlichen Reflexions- und Brechungsgesetzes für homozentrische Strahlen dar. Solange man an dessen Gültigkeit festhält, also  $B$  als Konstante auffaßt, wird aus (4)

$$1 = \frac{\frac{B}{N}}{\frac{B}{N} + 1} \frac{1}{\log\left(\frac{B}{N} + 1\right)}.$$

Diese Beziehung, die einen zwangsläufigen Zusammenhang zwischen  $B$  und  $N$  verlangt, ist vollständig unsinnig, die versuchte Art den zweiten Hauptsatz zu erfüllen, also abzulehnen.

Bei genauerer Überlegung erscheint dieser Befund nicht einmal erstaunlich; denn daß eine Änderung in der Gesamtquantenzahl oder Intensität allein nicht notwendig eine Arbeitsleistung des Strahls bedingt, geht schon daraus hervor, daß bei der gewöhnlichen Brechung an der Trennungsfläche zweier Dielektrika immer eine Teilung des Lichts in zwei Teile von verringelter Intensität stattfindet, ohne daß dabei Arbeit geleistet würde. Aus diesem Verhalten bei der Brechung ist zu entnehmen, daß Intensitätsabnahme allein auch bei der Absorption noch keine arbeitsleistende Temperaturabnahme bewirkt. Denn wir müssen uns erinnern, daß der zweite Hauptsatz zwar für jede Arbeitsleistung eine Temperaturänderung verlangt, aber nicht umgekehrt.

Die thermodynamische Rechtfertigung des Photoeffekts kann jetzt nur noch gefunden werden, indem man in Gl. (1')  $B$  als variabel ansieht, also die Gültigkeit des Brechungsgesetzes aufgibt. Wir

nehmen also an, daß der in die photoelektrische Substanz eindringende, nicht absorbierte Teil des Lichts anomal gebrochen wird. Dieser Gedanke ist an sich ungewohnt, aber bei kritischer Betrachtung der über die Brechung, insbesondere den Brechungsindex photoelektrischer Metalle bekannten Daten kann man ihn nicht als in Widerspruch mit der Erfahrung stehend ablehnen. Die Lichtbrechung in Metallen ist offenbar wirklich nicht normal. Denn wenn man sich auch mit den Brechungsindizes  $< 1$  abfindet, welche bei den empfindlichsten Elementen, den Alkalien, bis auf 0,02 heruntergehen, so bleibt noch immer die schwerwiegende Anomalie an dünnen Metallschichten übrig: Von den ersten Durchstrahlungsversuchen von Kundt<sup>1)</sup> an dünnen Prismen bis zu den neuesten Ergebnissen von Jagersberger<sup>2)</sup> nach der Reflexionsmethode zeigen alle Versuche eine Abnahme des gemessenen Brechungsexponenten mit zunehmender Schichtdicke, die in Widerspruch zum wesentlichsten Inhalt des normalen Brechungsgesetzes steht.

Beide Tatsachen bringen wir in Verbindung mit unserem thermodynamischen Ansatz, nach welchem  $B$  beim Photoeffekt wachsen muß, um den zweiten Hauptsatz zu erfüllen. Wir schreiben also jetzt

$$(4a) \quad -\frac{dN}{N} = \alpha dx = \frac{dB}{(B+N) \log \left( \frac{B}{N} + 1 \right)}$$

leiten also die Arbeitsleistung aus der Änderung von  $B$  allein ab.

Auch diese Gleichung, die  $N$ , d. h. die Intensität explizit enthält, ergibt noch keine sinnvolle Beziehung. Aber man sieht sofort, daß es genügt, in der Ausgleichsgleichung (1') die Zahl 1 im Argument des Logarithmus wegzulassen, also von der Planckschen Energieverteilung auf die ältere, nur genähert gültige Wiensche Form zurückzugehen, um auf dem gleichen Wege zu der Beziehung zu gelangen

$$(5) \quad \alpha dx = \frac{dB}{B \log \frac{B}{N}},$$

$$\frac{dB}{B} = \alpha dx \left( \log \frac{B}{N} + 1 \right) = \alpha dx \frac{h\nu}{k\tau}.$$

Die Bezeichnung  $\tau$  ist hier für die Temperaturfunktion des Wienschen Gesetzes eingeführt. Aus (5) ergibt sich, (wenn  $\alpha/\tau$  unabhängig von  $x$  bleibt)

$$(6) \quad \log \frac{B}{B_0} = \alpha x \frac{h\nu}{k\tau}.$$

1) A. Kundt, Ann. d. Phys. 34. S. 469. 1888.

2) J. Jagersberger, Ztschr. f. Phys. 89. S. 564. 1934.

Erinnern wir uns der Bedeutung von  $B = \frac{2 F n^2 r^2 \Omega}{c^2}$ , und fassen  $n$  entsprechend seiner ursprünglichen Bedeutung als unveränderliche Materialkonstante auf, so stellt dieses Wachstum von  $B$  folgenden physikalischen Vorgang dar: Die Größe  $F \Omega$ , d. h. bei ebener Grenzfläche die Öffnung des Strahlenbündels wächst beim Eindringen in das Metall exponentiell an. Nimmt man hierauf bei der Berechnung der Versuche keine Rücksicht, sondern setzt die Gültigkeit des Brechungsgesetzes voraus, also

$$d \frac{n^2 \Omega}{dx} = 0,$$

so wird

$$\frac{1}{n^2} \frac{d(n^2)}{dx} = - \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dx}.$$

Es muß also der Versuch eine scheinbare Abnahme des Brechungsindex mit der Eindringungstiefe ergeben, wie sie tatsächlich gefunden wird.

Für einen quantitativen Vergleich ist Gl. (6) allerdings wenig geeignet. Denn einmal bestimmt der Versuch einen Mittelwert des abnehmenden scheinbaren Brechungsexponenten, sodann ist auch der Gang des Absorptionskoeffizienten  $\alpha$  nicht genügend bekannt. Die Experimente zeigen hier bei dünnen Schichten eine Abnahme mit zunehmender Schichtdicke, also in gleichem Sinn wie bei  $\tau$ . Ob dabei aber  $\alpha/\tau$  wirklich konstant bleibt, so daß die Abhängigkeit der anomalen Brechung von der Temperatur herausfällt, ist einstweilen nicht zu entscheiden. Wir begnügen uns deshalb mit dem Ergebnis, daß unsere thermodynamische Ableitung den Effekt der anomalen Brechung, d. h. die Abnahme des gemessenen  $n$  mit der Schichtdicke, qualitativ richtig ergeben hat.

III. Die Mängel der bisherigen Ableitung liegen auf der Hand: Wir haben die Anwendung des zweiten Hauptsatzes auf den Photoeffekt erzwungen, indem wir eine durchaus unzulässige Änderung an der thermodynamischen Temperaturfunktion vorgenommen haben, statt der Formel von Planck die ältere von Wien setzten. Es besteht nun aber die Möglichkeit, diesen Schritt nachträglich in einer Weise zu rechtfertigen, die für die thermodynamische Auffassung der Strahlung sehr bedeutsam wird. Merkwürdigerweise ist dieser Weg durch die historische Entwicklung der Theorie bereits vorgezeichnet:

Wir gehen zunächst von der Temperatur auf die zugehörige Entropie des Strahls zurück, die nach Planck in der hier gewählten Schreibweise gegeben ist durch

$$(7) \quad S = k N \log \frac{B}{N} + k(B + N) \log \left(1 + \frac{N}{B}\right).$$

In dem älteren Ansatz, der zu der Wienschen Näherungsformel führt, fehlt das zweite Glied, das erste lautete

$$(8) \quad k N \log \frac{B e}{N},$$

so daß sich (7) begründeter Weise

$$(7') \quad S = k N \left[ \log \frac{B}{N} + 1 \right] + k N \left[ \left( 1 + \frac{B}{N} \right) \log \left( 1 + \frac{N}{B} \right) - 1 \right]$$

schreiben läßt. Wir weisen demgemäß jedem einzelnen Quant die Entropie  $s_1 = k \log \frac{B e}{N}$  zu. Wenn die Wahrscheinlichkeiten, die dem Entropiebegriff zugrunde liegen, voneinander unabhängig wären, so würden sich ihre Logarithmen einfach addieren, die Gesamtentropie des Strahls wäre gleich der Summe dieser Entropien, d. h. gleich dem Wert in Gl. (8). Eine vollständige Unabhängigkeit der Quanten voneinander liegt aber in der schwarzen Strahlung nicht vor, die Kohärenz des Strahls beweist irgendeinen Zusammenhang zwischen seinen Teilen. Daß diese Kohärenz bei der Berechnung der Entropie eine wesentliche Rolle spielt, hat Laue<sup>1)</sup> bereits 1906 nachgewiesen. Infolgedessen erhält die Entropie des kohärenten Strahls ein additives Zusatzglied, den zweiten Summanden in Gl. (7'), der also nur von der Kohärenz des Strahles herrührt. Lassen wir bei der Anwendung des zweiten Hauptsatzes auf den Photoeffekt diesen zweiten Summanden weg und bilden die Temperatur durch Differenzierung des ersten allein, wodurch wir auf die Wiensche Formel kommen, so haben wir begrifflich nur folgendes getan: Wir haben die Arbeitsleistung nur aus der Änderung der Entropie der Quanten selbst berechnet, Änderungen der Kohärenzentropie haben wir außer acht gelassen. Diese Behandlungsweise ist durchaus sinnvoll, gerade weil es sich um einen Quanteneffekt handelt, der die Kohärenz des Lichtes nicht voraussetzt. Wir sehen uns also veranlaßt, die Temperatur  $\tau$  als Temperatur der Quanten im Gegensatz zu  $\vartheta$ , der Temperatur der schwarzen Strahlung, einzuführen.

Diese Quantentemperatur ist natürlich nicht die Temperatur eines einzelnen Quants, sondern die Temperatur des Strahles, die sich aus seiner Quantenentropie ohne Rücksicht auf seine Kohärenz ableitet. Die Entropie selbst aber können und wollen wir dem einzelnen Quant unmittelbar zuschreiben. Diese Annahme erfordert keine erheblichen Änderungen bisher üblicher Vorstellungen. Da die Quantenperiode  $\nu$  schon bisher als Mittelwert eines kleinen Schwingungsintervalls angesehen wurde, so ermöglicht die Verteilung

1) M. Laue, Ann. d. Phys. 20. S. 375. 1906.

der Einzelschwingungen innerhalb dieses Intervalls schon für das einzelne Quant die Annahme jener elementaren Unordnung, welche die alleinige Voraussetzung für die Definition des Entropiebegriffes bildet. Man kann geradezu die von Planck eingeführte Hypothese der natürlichen Strahlung auf das einzelne Quant übertragen und in Anlehnung an das dort Gesagte behaupten: Der Hauptunterschied zwischen einem Bündel Hertz'scher elektromagnetischer Wellen vom Betrag  $h\nu$  und einem natürlichen Lichtquant derselben Periode besteht in dessen elementarer Unordnung, in seiner Entropie.

Wie ist es nun aber möglich, die Entropie eines Quants nicht nur begrifflich zu definieren, sondern als Funktion der nur für den Strahl gültigen Größen  $B$  und  $N$  auszudrücken? Entsprechend der allgemeinen Definition von Boltzmann können wir die Entropie des Quants als durch die innere Verteilungswahrscheinlichkeit seiner Einzelschwingungen gegeben betrachten:

$$(9) \quad s_1 = k \log W.$$

Zwischen dieser unbekannten inneren Verteilungswahrscheinlichkeit und der Helligkeit eines homozentrischen monochromatischen Strahls, der einem schwarzen Hohlraum entstammt, besteht nun offenbar ein fester Zusammenhang. Wenn wir den Quanten eine veränderliche innere Wahrscheinlichkeit zuschreiben, so ist dieselbe im Gleichgewicht des schwarzen Körpers mit ganz bestimmten Werten der Helligkeit verbunden, die auch für das aus dem Hohlraum ausgestrahlte Bündel gelten. Die Strahlung besitzt also nicht nur ein „inneres“ Gleichgewicht, welches den Zustand der Quanten betrifft, sondern zugleich ein „äußeres“, welches die Helligkeit seiner monochromatischen Strahlen, d. h.  $N/B$  bestimmt. Darum ist es möglich, die Entropie der Quanten als Funktion von  $N/B$  darzustellen, wenn sich dieselben im Gleichgewicht befinden. Die Gleichgewichtsbedingung lautet also:

$$(10) \quad W = \frac{B}{N} e.$$

Die Entropie  $S$  nach Gl. (7) besitzt nur der kohärente Strahl. Einem Bündel, das aus lauter Quanten verschiedenen Ursprungs zusammengesetzt, also vollständig inkohärent wäre, käme nur die Quantenentropie zu, die Kohärenzentropie fehlt. Für den Photoeffekt ist dies gleichgültig, er ist ein reiner Quanteneffekt, also nur von der Quantenentropie abhängig. Für optische Fragen aber gilt dies nicht, denn optische Bilder können nur durch Interferenz entstehen, sind also wesentlich durch die Kohärenzentropie bedingt, wie wir später sehen werden.

Die eingangs aufgestellte Behauptung, nach welcher beim Photoeffekt die vom zweiten Hauptsatz geforderte Kompensation nur durch Heranziehung des Gesamtstrahls möglich sei, ist jetzt in folgendem Sinn zu verstehen: Von den beiden Hauptsätzen, welche nach thermodynamischer Auffassung den Vorgang beherrschen, kann der erste, das Energieprinzip, für das einzelne Quant aufgestellt werden, nicht aber der zweite. Die Beschreibung mittels des Energieprinzips ist unvollständig, da sie den Zusammenhang zwischen den absorbierten und den durchgehenden Quanten außer acht läßt. Der zweite Hauptsatz bezieht diese Frage ein, er setzt die Arbeitsleistung in Beziehung zur Entropieänderung der eindringenden Quanten, so entsteht der anfangs unverständliche Zusammenhang mit den Eigenschaften des Gesamtstrahls.

Es bleibt eine Schwierigkeit: Die vorgenommene Zerlegung von  $S$  in die beiden Summanden, Quantenentropie + Kohärenzentropie, ist willkürlich und nur im Anschluß an die historische Entwicklung gewählt. Anstatt des Wertes  $e$  könnte in Gl. (8) jede beliebige andere Zahl stehen. Die Definition der Temperatur  $\tau$  würde hierdurch verändert, die Berechnung der anomalen Brechung aber nicht wesentlich beeinflußt. Insbesondere wäre es naheliegend, den Summanden  $\pm 1$  in Gl. (7') bei beiden Teilen der Entropie wegzulassen. Wenn wir dies nicht tun, vielmehr an obiger Zerlegung festhalten, so geben wir dafür folgende physikalische Begründung: Es ist bekannt, daß die statistische Behandlung des „Lichtquantengases“ auf die Wiensche Formel, d. h. auf den in Gl. (8) stehenden Wert der Entropie führt. Nun geht allerdings diese Rechnung von ganz anderen Voraussetzungen aus, indem sie die Lichtquanten als unveränderliche, nicht mit Einzelentropie begabte Elemente einer statistischen Abzählung ansieht, während hier dem einzelnen Quant eine variable Entropie zugeschrieben wird. Dieser Unterschied ist aber nicht so tiefgreifend, als er zunächst erscheint. Betrachten wir als Urbild einer statistischen Verteilung ein Würfelspiel, so sind wir gewohnt, die einzelnen Würfel als untereinander gleich, innerlich unveränderlich und homogen anzusehen, so daß die Verteilung der Wurfbilder aus der Abzählung von Komplexionen gleichartiger Elemente entsteht. Wir können uns aber auch vorstellen, daß die Würfel nicht gleichartig und homogen sind, sondern z. B. einen veränderlichen Schwerpunkt besitzen, dessen Lage beim Wurf das einzelne Wurfbild zwangsläufig bestimmt, während die Schwerpunktlage selbst durch Wahrscheinlichkeitsgesetze bestimmt ist. Das Endergebnis braucht hierdurch nicht berührt zu werden, die Wahrscheinlichkeitsbetrachtung ist nur in das Innere des einzelnen

Würfels verlegt. Hierdurch entsteht aber eine neue Möglichkeit: Die inneren Füllmassen der Würfel, deren Schwerpunktslagen der Wahrscheinlichkeitsbetrachtung jetzt unterworfen werden, können aufeinander Kräfte ausüben, so daß die Gesamtwahrscheinlichkeit von dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten abweicht. Durch diese Wechselwirkung kann das Ergebnis weitgehend verändert werden, ohne daß man zu einem Abgehen von der klassischen Statistik gezwungen wäre, wie sie in den Theorien von Bose-Einstein und Fermi-Dirac eingeführt worden sind. Diese Rückverlegung der Wahrscheinlichkeitsbetrachtung in das Innere des einzelnen Elements ermöglicht also den Ersatz der abgeänderten Statistik durch Wechselwirkungen zwischen den Elementen. Im allgemeinen mag diese Betrachtungsweise keine besonderen Vorteile besitzen, im Gebiet der Optik aber, wo die Wechselwirkungen der Quanten als Interferenzen längst bekannt sind, entsprechen sie der Natur des Problems.

Für unseren Fall aber ergibt sich folgendes: Jede Anwendung der klassischen Statistik, welche die Wechselwirkungen nicht berücksichtigt und mit unveränderlichen Elementen rechnet, muß zu dem Entropiewert der inkohärenten Strahlung führen. Die Zerlegung

$$\log \frac{B}{N} + 1 + \left(1 + \frac{B}{N}\right) \log \left(1 + \frac{N}{B}\right) - 1$$

$$\text{Quantenentropie } s_1 + \text{Kohärenzentropie } s_2$$

ist also richtig, weil  $s_1$  dann mit der statistisch abzählbaren Entropie des inkohärenten Lichtquantengases übereinstimmt.

In nebenstehender Figur sind die drei Funktionen

$$s = \frac{S}{k \cdot N},$$

$$s_1 = \frac{S_1}{k \cdot N},$$

$$s_2 = \frac{S_2}{k \cdot N}$$

in ihrer Abhängigkeit von  $N/B$  gezeichnet.

IV. Die Betrachtung der Figur führt zu einer weiteren Folgerung, die wir nicht außer acht lassen dürfen, obwohl sie zu recht merkwürdigen Folgerungen führt. Während die Entropien  $s$  und  $s_2$  zwischen 0 und  $\infty$  verlaufen, wie es der Natur dieser Größen entspricht, liegt  $s_1$  zwischen  $\pm \infty$ , d. h. die der Entropie zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeiten beschränken sich nicht auf das Gebiet der ganzen Zahlen. Dies ist nach der Definition von  $S$  nicht erlaubt und zwingt uns, alle Zustände, welche rechts vom Schnitt-

punkt der  $s_1$ -Kurve mit der Abszissenachse liegen, für die also  $\frac{N}{B} > e$  ist, als physikalisch unmöglich auszuschließen. Hieraus folgt, daß auch in dem Strahlungsgesetz (3)

$$e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1 = \frac{B}{N} \geq \frac{1}{e}$$

sein muß, oder:

$$(11) \quad \nu \geq \frac{k\vartheta}{h} \log \left( 1 + \frac{1}{e} \right),$$

d.h. Quanten von kleinerem  $\nu$  oder größerer Wellenlänge sind in einer schwarzen Strahlung der Temperatur  $\vartheta$  nicht möglich. Wir können uns vorstellen, daß die Quanten verschiedener Wellenlängen in der Strahlung verschiedene Wahrscheinlichkeiten und Entropien besitzen, daß aber ihre Anzahl so abgestimmt ist, daß die schwarze Temperatur für alle gleich wird. Dann nimmt  $W$  mit wachsender Wellenlänge ab, ebenso  $s_1$ , bis an der durch Gl.(11) gegebenen Grenze  $W = 1$ ,  $s_1 = 0$  wird. Hier gibt es keine verschiedenen Komplexionen mehr, die Quanten sind zu einer geordneten Strahlung geworden, für die sich keine statistische Verteilung mehr berechnen läßt.

So unerwartet diese Schlußfolgerung sein mag, so entspricht sie doch durchaus der Natur der Lichtquantenhypothese. Denn es ist sinnwidrig, von Quanten mit Wellenlängen bis zur Größenordnung drahtloser Wellen zu reden, die sich als unteilbare Einheiten bewegen. Vielmehr muß in der schwarzen Strahlung zwischen diesen und den optischen Frequenzen irgendwo eine Grenze liegen, wo der Begriff des Quants seine Bedeutung verliert. Jenseits dieser Grenze mag es wohl noch geordnete elektromagnetische Schwingungen geben, aber keine Quanten. Wenn also die natürliche Lichtstrahlung aus Quanten besteht, so enthält sie diese großen Wellenlängen nicht.

Nach Gl.(11) ist die minimale Schwingungszahl einer schwarzen Strahlung

$$\nu_0 = \frac{k\vartheta}{h} \log \left( 1 + \frac{1}{e} \right) = \frac{1,37 \cdot 10^{-16} \cdot 0,3\vartheta}{6,55 \cdot 10^{-27}} \sim 6 \cdot 10^9 \vartheta,$$

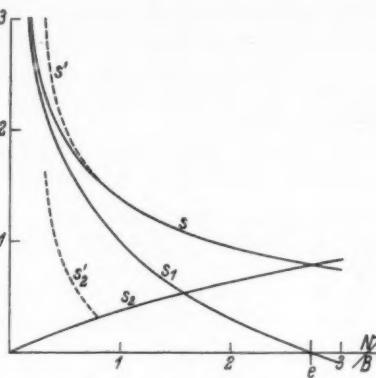


Fig. 1

also z. B. für  $\vartheta = 5000^\circ$   $\nu_0 = 3 \cdot 10^{13}$ ; die maximale Wellenlänge liegt also bei  $1 \cdot 10^{-3}$  cm oder  $100 \mu$  im Gebiet der Reststrahlen und rückt mit fallender Temperatur zu immer größeren Wellenlängen. Die Möglichkeit eines direkten Nachweises dieser Grenze ist vielleicht nicht ganz ausgeschlossen.

Eine andere indirekte Prüfung der Gl. (11) ergibt sich durch folgende Überlegung: Nach Planck ist die Dichte der Gesamtstrahlungsenergie

$$u = \frac{8 \pi h}{c^3} \int \left[ e^{-\frac{h\nu}{k\vartheta}} + e^{-\frac{2h\nu}{k\vartheta}} + e^{-\frac{3h\nu}{k\vartheta}} + \dots \right] \nu^3 d\nu$$

$$= \frac{48 \pi h}{c^3} \left( \frac{k\vartheta}{h} \right)^4 \cdot \alpha,$$

wo

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = 1,0823,$$

wenn das Integral von 0 bis  $\infty$  erstreckt wird. Sind nun aber Quanten nur bis zu einer Grenzfrequenz

$$\nu_0 = \frac{k\vartheta}{h} \log \left( 1 + \frac{1}{e} \right)$$

möglich, so darf das Integral nur von  $\nu_0$  bis  $\infty$  erstreckt werden. Die Auswertung dieses Integrals ergibt einen Zahlenfaktor  $\alpha' = 1,0687$ , der um  $1,3\%$  kleiner als  $\alpha$  ist. Die Differenz  $\alpha - \alpha'$  liegt an der Grenze der experimentell erreichten Genauigkeit, die bei der Bestimmung der Strahlungskonstante aus der Gesamtstrahlung von Ladenburg<sup>1)</sup> zu  $1 - 1\frac{1}{2}\%$  angegeben wird. Da auch die neuesten Präzisionsmessungen<sup>2)</sup> der Größe  $h$ , welche hier mit der dritten Potenz eingeht, noch eine Ungenauigkeit von  $0,5\%$  enthalten, ist die Aussicht auf einen Nachweis der langwelligen Quantengrenze auf diesem Wege noch wenig aussichtsreich.

V. Bisher haben wir uns nur mit den Gleichgewichtszuständen der Strahlung beschäftigt, in welchen zwischen dem Zustand der Quanten und der Helligkeit des Strahls ein zwangsläufiger Zusammenhang besteht, der durch die Beziehung

$$W = \frac{B}{N} \cdot e$$

gekennzeichnet war. Es gibt aber eine Reihe von Vorgängen, für welche diese Beziehung nicht mehr gilt. Hierzu gehören vor allem alle Strahlungsteilungen durch normale Reflexion und Brechung, die in der Optik beständig verwendet werden. Es ist deshalb notwendig, sich auch mit diesen Zuständen und ihren thermodynamischen Eigen-

1) B. Ladenburg, Handbuch Geiger u. Scheel XXIII, S. 305.

2) J. Gnan, Ann. d. Phys. [5] 20. S. 374. 1934.

schaften zu befassen. Dabei dient als Wegweiser die experimentell feststehende Tatsache, daß sich die Kohärenz des Lichtes durch diese Brechungen und Reflexionen nicht ändert. Denn das experimentelle Maß der Kohärenz, die Sichtbarkeit eines Interferenzbildes hoher Gangunterschiede, wird mit Apparaten bestimmt, die immer mehrfache Brechungen und Reflexionen des Lichtes bedingen, ohne daß sich jemals ein Einfluß auf das Ergebnis gezeigt hätte.

Demgemäß setzen wir für die Entropie eines solchen nicht im Gleichgewicht befindlichen Strahls

$$(12) \quad S = k N \left[ \log W + \left(1 + \frac{B}{N}\right) \log \left(1 + \frac{e}{W}\right) - 1 \right].$$

Wir schreiben also den Quanten trotz veränderlicher Helligkeit des Strahls den unveränderten Zustand ( $W$ ) zu. Der Strahl bleibt kohärent, aber nicht mehr schwarz;  $\frac{W}{e} \neq \frac{B}{N}$ .

Die Kohärenzentropie pro Quant wird jetzt:

$$(13) \quad \frac{s_2'}{k} = \left(1 + \frac{B}{N}\right) \log \left(1 + \frac{e}{W}\right) - 1.$$

Hier ist  $B/N$  variabel,  $e/W$  konstant = dem ( $N/B$ ) des ursprünglichen Gleichgewichts, aus dem der gebrochene oder reflektierte Strahl stammt. Tragen wir diese Funktion  $s_2/k$  in Fig. 1 ein, so erhalten wir Hyperbeln mit dem konstanten Parameter  $\log \left(1 + \frac{e}{W}\right)$ , welche die Kurve der Kohärenzentropien der schwarzen Strahlung  $s_2 = f\left(\frac{N}{B}\right)$  in Punkten  $\frac{N}{B} = \frac{e}{W}$  schneiden. Die an den Schnittpunkten in Richtung fallender  $N$  anschließenden Werte von  $s_2'$  geben die der fortgesetzten Schwächung des Strahls durch normale Brechung oder Reflexion entsprechenden Kohärenzentropien, die zu gehörigen Kurven  $s' = s_1 + s_2'$  stellen also die Gesamtheit der von diesem Gleichgewicht ausgehenden Zustände konstanter Kohärenz dar.

Differenziert man andererseits  $S_2$ , ebenso wie früher  $S_1$  nach der Energie, so erhält man

$$(14) \quad \frac{\partial S_2}{\partial J} = \frac{k}{h\nu} \log \left(1 + \frac{N}{B}\right), \quad (\nu = \text{const})$$

also bis auf den Faktor  $k/h$ , eben jenen Parameter obiger Hyperbeln konstanter Kohärenz. Wir bezeichnen den reziproken Wert dieses Ausdrucks, der gemäß seiner Ableitung ebenfalls als eine Temperatur anzusprechen ist, als Kohärenztemperatur

$$(14) \quad \tau_2 = \frac{h\nu}{k} \frac{1}{\log \left(1 + \frac{N}{B}\right)} = \frac{h\nu}{k} \frac{1}{\log \left(1 + \frac{e}{W}\right)}.$$

Für  $\tau$  schreiben wir in Zukunft  $\tau_1$ .

Man wird sich vielleicht daran stoßen, daß jetzt für den Lichtstrahl drei verschiedene Temperaturen definiert sind. Aber schon die gewöhnliche Gastemperatur spielt theoretisch drei ganz verschiedene Rollen, bei Berechnung des Wärmeinhalts, der Arbeitsfähigkeit und der Energieverteilung des Gases. Bei der Strahlung fallen diese drei Funktionen nicht mehr zusammen, daher die drei Temperaturen. Ihr Zusammenhang ist durch die Gleichung

$$(15) \quad \frac{1}{\vartheta} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$$

gegeben. Dieselbe gilt natürlich nur für den Fall des Gleichgewichts, außerhalb desselben verliert die Temperatur  $\vartheta$  jede Bedeutung.

VI. Die Kohärenztemperatur, die sich bei Strahlungsteilungen nicht ändert, ist das geeignete thermodynamische Maß für die Interferenzfähigkeit des Strahls, ebenso wie die Quantentemperatur das Maß für seine Arbeitsfähigkeit war. Zwischen ihr und der experimentellen Größe, welche die Kohärenz mißt, der sogenannten natürlichen Linienbreite, gilt es nun einen Zusammenhang zu finden: Zu diesem Zweck müssen wir die Frage von einer anderen Seite betrachten. Die Definition der natürlichen Linienbreite beruht ursprünglich auf den Vorstellungen der klassischen elektromagnetischen Lichttheorie. Diese setzte die elementare Lichtemission als gedämpfte Welle an und berechnete für sie ein logarithmisches Dekrement der Intensität

$$(16) \quad \omega = \frac{8\pi^2 \epsilon^2 \nu_0^3}{3mc^5}.$$

Hier ist  $\nu_0$  die streng monochromatische Schwingungszahl der elementaren Welle. Durch Überlagerung vieler solcher kohärenter Wellenzüge entsteht die Spektrallinie; ihre Analyse im Spektralapparat entspricht der mathematischen Zerlegung in eine Sinusreihe mit von 0 bis  $\infty$  ansteigendem  $\nu$  (nach Fourier). Hieraus ergibt sich eine Intensitätsverteilung der Linie

$$(17) \quad J = J_0 \frac{\omega^2}{\omega^2 + 16\pi^2(\nu_0 - \nu)^2}$$

und eine halbe Halbwertsbreite  $(\nu_0 - \nu) = \frac{\omega}{4\pi}$ ; dieselbe ist also dem obigen Dämpfungsdecrement bis auf den Faktor  $4\pi$  gleich. Un gedämpfte unbegrenzte reine Sinuswellen würden eine Halbwertsbreite 0 bedingen.

Gl. (16) ist heute aufgegeben, Gl. (17) dagegen in gewissem Sinn experimentell bestätigt. Allerdings ist es nicht möglich, die durch diese Gleichung angegebene Linienform direkt auszumessen und

ihre Halbwertsbreite so zu bestimmen, da diese „natürliche“ Breite viel zu gering ist und durch Verbreiterungen verdeckt wird, welche vom Spektralapparat und von der Lichtquelle herrühren. Es gibt aber einen Umweg, der zum Ziel führt. Gl. (17) gilt für schwache Lichtquellen, in welchen die Konzentration der emittierenden und absorbierenden Teilchen so klein bleibt, daß die Intensität der Linienmitte  $J_0$  kleiner ist als die der zugehörigen schwarzen Strahlung. Wird diese Grenze überschritten, so kann  $J_0$  nicht mehr wachsen, dafür geht die Linie jetzt in die Breite nach einem Gesetz, das durch Heranziehung der Dispersionstheorie ermittelt und experimentell bestätigt ist. Dieses Gesetz für tiefe Lichtquellen lautet, wenn mit  $\mu$  der Abstand von der Linienmitte, mit  $\varrho$  die Konzentration der Teilchen, mit  $l$  die Dicke der durchstrahlten Schicht, mit  $J_\mu$  die Intensität an der Stelle  $\mu$ , mit  $A$  die sogenannte Gesamtabsorption bezeichnet wird

$$(18) \quad \mu^2 = - \frac{\varrho \omega l}{4c \log \frac{J_\mu}{J_0}},$$

$$(19) \quad A^2 = J_0^2 \frac{\pi \omega \varrho l}{c}.$$

Da die Linie auf diesem Wege bis zum Vielfachen ihrer natürlichen Breite auseinandergezogen werden kann, gelingt es, die störenden Einflüsse der apparativen Verbreiterung, des Dopplereffekts und der Stoßverbreiterung, zurückzudrängen und  $\omega$  zu messen. Der Versuch ist nicht einfach, aber in einigen Fällen erfolgreich durchgeführt. Man kann ihn als direkte Bestimmung der natürlichen Halbwertsbreite an der Linie selbst bezeichnen; aus dem Gesagten geht hervor, daß es sich dabei immer um Linien im thermodynamischen Gleichgewicht von angebbarer Temperatur handelt.

Eine wesentlich verschiedene Vorstellung liegt den quantentheoretischen Bestimmungsmethoden der Größe  $\omega$  zugrunde.  $\omega$  entspricht hier der spontanen Übergangswahrscheinlichkeit, sein reziproker Wert der Lebensdauer oder Verweilzeit angeregter Zustände, der Versuch besteht in der Messung der Drehung der Polarisationsebene einer Resonanzstrahlung oder der Abklingung des Lichtes von Kanalstrahlen. Er setzt dünne Lichtquellen voraus, bei welchen keine Beeinflussung der spontanen Übergangswahrscheinlichkeit durch die Strahlung stattfindet und liefert definitionsgemäß eine atomare Konstante der leuchtenden Substanz.

Der Zusammenhang dieser quantentheoretischen Größe mit der Dämpfungskonstante der klassischen Theorie liegt eigentlich nur in

V  
2  
2  
1  
9  
3  
5  
XUM

ihren gemeinsamen mathematischen Eigenschaften (beide stellen sich als Konstanten eines exponentiellen Abfalls mit der Zeit dar). Die physikalische Beziehung bleibt unklar.

Indem wir jetzt zu unseren thermodynamischen Betrachtungen zurückkehren, fassen wir die durch Gl. (17) dargestellte Intensitätsverteilung, deren charakteristischer Parameter die Halbwertsbreite  $\omega/4\pi$  ist, als Wahrscheinlichkeitsverteilung auf. Zu ihr gehört notwendig ein Zahlenwert der Wahrscheinlichkeit und aus ihm leiten sich zwangsläufig Entropie und Temperatur ab, und zwar, da es sich um ein Interferenzprodukt handelt, Kohärenzentsropie und Kohärenztemperatur. Insbesondere die letztere, welche ebenso wie die spektrale Breite von der Intensität der Linie unabhängig ist, eignet sich zur Herstellung der gesuchten Beziehung zwischen dem experimentellen  $\omega$  und den thermodynamischen Größen. Wir haben also, im Gegensatz zur bisherigen Annahme, zu erwarten, daß die spektrale Breite eine Funktion von  $\tau_2$  und damit bei Gleichgewichtszuständen auch von  $\vartheta$ , der schwarzen Temperatur der Lichtquelle, wird. Darüber hinaus fehlen uns alle Anhaltspunkte, die Brücke von der Verteilungsfunktion zur Wahrscheinlichkeitszahl ist mangels jeder Abzählungsmöglichkeit nicht zu schlagen. Wir ersetzen dieselbe durch folgenden hypothetischen Ansatz:

$$(20) \quad \frac{\omega - \omega_0}{4\pi} = \frac{\nu}{\tau_2}.$$

Diese Gleichung ist auf folgendem Wege entstanden: Um für eine Beziehung zwischen  $\tau_2$  und  $\omega$  Dimensionsgleichheit zu erreichen, ist die Hereinnahme der Schwingungszahl das nächstliegende Mittel, unter den möglichen Beziehungen zwischen diesen drei Größen ist Gl. (20) die einfachste. Die absolute Konstante  $\omega_0$  ist thermodynamisch notwendig, um der Fall verschwindender spektraler Breite auszuschließen, der andernfalls für  $\tau_2 = \infty, \vartheta = 0$  eintreten würde; sie erfüllt gleichzeitig die quantentheoretische Forderung nach einer absoluten Atomkonstante. Da

$$\tau_2 = \frac{\hbar \nu}{k \log \left( \frac{N}{B} + 1 \right)}$$

ist, wird

$$(20a) \quad \omega' = \omega - \omega_0 = \frac{4\pi k}{h} \log \left( \frac{N}{B} + 1 \right)$$

oder durch Substitution aus (3)

$$\omega' = \frac{4\pi \nu}{\vartheta} - \frac{4\pi k}{h} \log \left( e^{\frac{\hbar \nu}{k \vartheta}} - 1 \right).$$

Diese Funktion ist in Fig. 2 gezeichnet, und zwar für die Periode der  $D$ -Linien  $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ . Sie ermöglicht den Vergleich mit dem Versuch, sobald es gelingt, eine Linie von der Temperatur  $\vartheta$  herzustellen.

Man kann sich zu diesem Zweck ein monochromatisches Gleichgewicht ähnlich hergestellt denken wie das Gleichgewicht der schwarzen Strahlung, indem man in einen Hohlraum angeregte Atome, die eine einzige Wellenlänge ausstrahlen, einschließt. Dann wird durch das bekannte Spiel der Absorption und Emission die Strahlung sich mit ihren Erzeugern ins Gleichgewicht setzen und eine kleine Öffnung in der Wand als Gleichgewichtsstrahlung verlassen. Im Gegensatz zum schwarzen Körper darf dieser Hohlraum keine Materie enthalten, welche die eingeschlossene Strahlung in andere Wellenlängen überführen könnte, die Wände müssen daher vollkommen spiegelnd sein, ein Zusammenhang mit der Körpertemperatur besteht nicht. Die aus diesem Kasten austretende Strahlung ist in dem Sinn im Gleichgewicht, daß der Zustand ihrer  $\epsilon$ en und die natürliche Spektralbreite ihrer Linien ihrer Helligkeit entsprechen, sie liefert also Emissionslinien bestimmter Temperatur.

Aber auch jede schwarze Strahlung, die eine genügend tiefe absorbierende Schicht durchsetzt hat, bei der also das austretende Licht einen längeren Emissions- und Absorptionsprozeß durchlaufen hat, gibt mit genügender Näherung die gleichen Linien in Absorption. An ihnen kann also die natürliche Linienbreite gemessen, Gl. (20a) geprüft werden. Die Messung ist von Minkowski<sup>1)</sup> an den  $D$ -Linien durchgeführt. Die zu messende Linie ist als verbreiterte Absorptionslinie mittels einer Wolframlampe hergestellt, welche ein langes Rohr von Natriumdampf, der auf einer Temperatur von etwa  $550^\circ$  gehalten wird, durchstrahlt. Die Messung von  $\omega$  erfolgte mittels Gl. (19) unter nachweisbar genügender Ausschaltung aller fremden

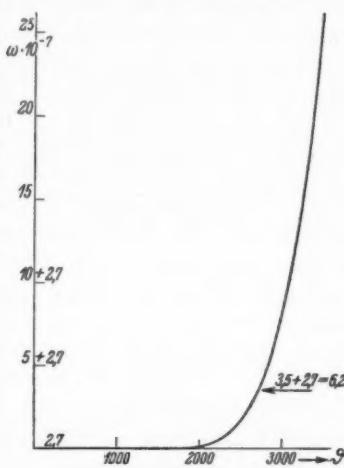


Fig. 2

1) R. Minkowski, Ztschr. f. Phys. 36. S. 839. 1926.

Annalen der Physik. 5. Folge. 22.

Einflüsse auf die gemessene Breite. Es ergab sich der Wert  $= 6,2 \cdot 10^7$ , der entsprechend dem damaligen Stand der Theorie als Bestätigung der klassischen Annahmen gewertet wurde. Diese Deutung ist heute nicht mehr haltbar, nachdem seither Schütz<sup>1)</sup> für das blaue Cäsiumdublett die Größe  $2,5 \cdot 10^7$  gefunden hat, anstatt des klassischen Wertes  $10,6 \cdot 10^7$ . Der Wert  $6,2 \cdot 10^7$  für die D-Linien des Natriums bleibt natürlich bestehen.

Die Vergleichbarkeit dieser Messung mit unserer Rechnung beruht nun darauf, daß für die gleiche Linie  $\omega_0$  bekannt ist und zwar aus einer Kanalstrahlmessung von Kerschbaum<sup>2)</sup> zu  $2,7 \cdot 10^7$ . Denn nach den obigen Darlegungen wird nach dieser Methode die Atomkonstante  $\omega_0$  bestimmt. Um diesen Wert haben wir also jetzt die Abszissenachse der Fig. 2 verschoben. Die Kurve verläuft bis etwa  $2000^\circ$  praktisch horizontal, um dann mit der Temperatur steil anzusteigen. Dabei müssen wir nochmals hervorheben, daß es sich hier um die Temperatur der beleuchtenden Lampe handelt, mit welcher sich die im Dampfrohr angeregte Strahlung nach Durchlaufen einer hinreichend dicken Schicht ins Gleichgewicht gesetzt hat und die als angenähert „schwarz“ oder wenigstens „grau“ anzusehen ist. Unsere theoretische Kurve soll also den gemessenen Wert  $6,2 \cdot 10^7$  bei der Temperatur dieser Lampe erreichen, die zwar nicht gemessen, aber als „stark überlastete Wolframglühlampe“ hinreichend gekennzeichnet ist. Der aus der Kurve abgelesene Wert von  $2700^\circ$  abs. dürfte hiermit genügend übereinstimmen. Eine entscheidende Bedeutung besitzt diese Übereinstimmung noch nicht, die Prüfung der Theorie wird sich aber durch Variierung der Temperatur der Beleuchtungslampe mit Sicherheit durchführen lassen, da einer Temperaturänderung von  $100^\circ$  eine Änderung von  $\omega$  um etwa 20 % entsprechen soll. Die Prüfung dieser Temperaturabhängigkeit hat zugleich den Vorzug, daß sie den Kern der ganzen hier vorgetragenen Theorie trifft; denn die variable natürliche Linienbreite ist das unmittelbare experimentelle Abbild der variablen Entropie der Quanten, von der wir ausgegangen sind<sup>3)</sup>. Die Angabe eines solchen entscheidenden Experiments muß auch die Rechtfertigung dafür sein, daß wir in diesem letzten Abschnitt mit Gl. (20) ein stark hypothetisches Moment eingeführt haben.

1) W. Schütz, *Ztschr. f. Phys.* **64**. S. 682. 1930.

2) H. Kerschbaum, *Ann. d. Phys.* **79**. S. 465. 1926.

3) Auch die Theorie von Einstein ergibt eine Abnahme der Verweilzeit mit steigender Temperatur, da zur spontanen Emission noch die „negative Absorption“ hinzukommt; diese Abnahme bleibt aber für sichtbares Licht und irdische Temperaturen unbeträchtlich.

Andererseits ermöglicht die Einführung der spektralen Breite durch diese Gl. (20a) in unseren früheren Betrachtungen einige bedeutsame Änderungen: Wir greifen zunächst die Frage der Zerlegung der Entropie in ihre beiden Teile nochmals auf und verallgemeinern den Ansatz der Gl. (7') zu

$$(7'') \quad S = kN \left[ \log \frac{B}{N} + x \right] + kN \left[ \left( 1 + \frac{B}{N} \right) \log \left( 1 + \frac{N}{B} \right) - x \right],$$

wo  $x$  eine beliebige Zahl ist. (Wir haben bereits früher erwähnt, daß die Wahl  $x = 1$  nicht zwingend ist.) Dann wird

$$(20') \quad \frac{h\nu}{k r_2} = \log \left( 1 + \frac{N}{B} \right) + 1 - x = \frac{h\omega}{4\pi k}.$$

Es ist also sehr naheliegend,  $1 - x = \frac{h\omega_0}{4\pi k}$  zu setzen. Dann braucht die Konstante  $\omega_0$  nicht erst nachträglich eingeführt zu werden, sondern erscheint bereits in den Ausdrücken für  $S_1$  und  $S_2$ , die jetzt lauten

$$S_1 = kN \left( \log \frac{B}{N} + 1 - \frac{h\omega_0}{4\pi k} \right)$$

$$S_2 = kN \left[ \left( 1 + \frac{B}{N} \right) \log \left( 1 + \frac{N}{B} \right) - \left( 1 - \frac{h\omega_0}{4\pi k} \right) \right].$$

Es treten also an die Stelle der reinen Zahl 1 (bzw.  $e$ ) Funktionen der Materialkonstante  $\omega_0$ , was den Ansatz physikalisch erheblich verständlicher macht, ohne ihn zahlenmäßig fühlbar zu ändern.

Die in Teil IV eingeführte Grenze für die Existenzfähigkeit der Quanten verwandelt sich jetzt in eine Grenze der natürlichen Linienbreite

$$\frac{\bar{\omega}}{4\pi} = \frac{\omega_0}{4\pi} + \frac{k}{h} \log \left( 1 + e^{1 + \frac{h\omega_0}{4\pi k}} \right) \sim 10^{10},$$

welche eine Ausdehnung dieser Größe über diesen Höchstwert verbietet, die Kurve der Fig. 2 also abschneidet und hiermit Unzuträglichkeiten verhindert, die sich aus einem unbegrenzten Wachstum der spektralen Breite ergeben würden (für sichtbares Licht allerdings erst bei Temperaturen der Größenordnung  $10^6$ ).

Endlich kann man noch die Entropien vollständig als Funktionen von  $\omega$  ausdrücken. Benutzt man dabei die Näherung

$$e^{\frac{h\omega}{4\pi k}} = 1 + \frac{h\omega}{4\pi k},$$

die für irdische Temperaturen und sichtbares Licht immer genügen dürfte, so ergibt sich für die Entropie einer im Gleichgewicht befindlichen Spektrallinie

$$S_1 = k N \left( \log \frac{4\pi k}{h(\omega - \omega_0)} + 1 - \frac{h\omega_0}{4\pi k} \right),$$

$$S_2 = N \frac{h\omega}{4\pi}$$

die Kohärenzentropie steht also mit der spektralen Breite in dem gleichen einfachen Zusammenhang wie die Energie mit der Periode.

Eine Weiterführung dieser Gedankengänge hat aber keinen Sinn, solange die experimentelle Entscheidung über die Veränderlichkeit der natürlichen Spektralbreite mit der Temperatur nicht gefallen ist, zu welcher uns leider die notwendige Apparatur fehlt.

Planegg bei München.

(Eingegangen 1. März 1935)

**Verfahren  
zur näherungsweisen Anpassung einer Lösung  
der Schrödinger- an die Diracgleichung**

**Von A. Sommerfeld und A. W. Maue**

Inhalt: § 1. Problemstellung. — § 2. Berechnung der ersten Näherung. — § 3. Entwicklung einer beliebigen Funktion nach Eigenfunktionen nullter Näherung. — § 4. Beispiel: Die elastische Streuung von Elektronen am Coulombfelde eines Kerns. — Zusammenfassung.

**§ 1. Problemstellung**

Gegeben sei eine Lösung  $\psi_0$  der gewöhnlichen Schrödinger-Gleichung für ein stationäres Einkörperproblem, das durch eine potentielle Energie  $V$  und (im Falle des kontinuierlichen Spektrums) etwaige Grenzbedingungen im Unendlichen festgelegt ist. (Vom Hinzutreten eines Vektorpotentials sehen wir ab.) Wir fragen nach der Lösung  $\psi$  der Diracgleichung bei gleichem  $V$  und gleichen ev. Grenzbedingungen.

Da die eigentliche Diracgleichung von erster Ordnung und anderer Bauart ist als die Schrödinger-Gleichung, so werden wir mit der „iterierten“ Diracgleichung operieren, d. h. derjenigen Gleichung zweiter Ordnung, die man erhält, wenn man die von Dirac vorgenommene Aufspaltung der relativistischen Schrödinger-Gleichung wieder rückgängig macht, wobei dann die bekannten Spinglieder auftreten. Sie lautet bei einem stationären Problem der Energie  $\varepsilon$ :

$$(1) \quad \mathcal{A}\psi + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \{(\varepsilon - V)^2 - E_0^2\} \psi = \frac{\gamma_4}{\hbar c} (\vec{\gamma} \operatorname{grad} V) \psi.$$

Die vier Größen  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  sind hyperkomplexe Einheiten, die wir den vier Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4 = i c t$  in symmetrischer Weise zuordnen.  $\vec{\gamma}$  bedeutet dementsprechend einen dreidimensionalen Raumvektor. Wir sehen davon ab, die  $\gamma$  speziell durch vierreihige Matrizen darzustellen<sup>1)</sup>. Es ist für das Folgende wesentlich, daß die  $\gamma$  nur auf der rechten Seite von (1) vorkommen, welche als Störungsglied (Spinkorrektion) zu behandeln ist.

1) Vgl. F. Sauter, Ztschr. f. Phys. **63**, S. 803. 1930 und **64**, S. 295. 1930.

Um dies einzusehen, setzen wir vorübergehend reines Coulombfeld voraus:

$$(2) \quad V = -\frac{Ze^2}{r}.$$

Die rechte Seite von (1) wird dann

$$(3) \quad -\alpha Z \gamma_4 \left( \vec{\gamma} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \psi.$$

Wegen der Kleinheit der Feinstrukturkonstanten  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  ist dies in der Tat bei leichten Atomen ( $\alpha Z$  klein) ein Korrektionsglied. Auf der linken Seite von (1) ist das Glied

$$(4) \quad \frac{V^2}{\hbar^2 c^2} = \frac{(\alpha Z)^2}{r^2}$$

sogar von der zweiten Ordnung in  $\alpha Z$ . Lassen wir beide Glieder weg, so können wir (1) der Schrödingerischen Form angeleichen:

$$(5) \quad \mathcal{D} \psi + \frac{2 \epsilon}{\hbar^2 c^2} \left( \frac{\epsilon^2 - E_0^2}{2 \epsilon} - V \right) \psi = 0.$$

Setzt man hier vor der Klammer  $\epsilon = m c^2 (m = \text{bewegte Masse})$  und in der Klammer  $\frac{\epsilon^2 - E_0^2}{2 \epsilon} = W$  ( $W = \text{Energie in Schrödingerischer Zählung}$ ), so ist die Angleichung vollständig.

Wir brauchen also in der Lösung  $\psi_0$  der gewöhnlichen Schrödingergleichung nur die Ruhmasse  $m_0$  zu ersetzen durch die relativistische Masse  $m$  und die Energie  $W$  in angegebener Weise auszudrücken durch die relativistische Energie  $\epsilon$ , um in dem *so modifizierten*  $\psi_0$  die *nullte* Näherung unserer iterierten Diracgleichung zu erhalten.

Wir ergänzen sie durch eine erste, zweite ... Näherung, indem wir ansetzen:

$$(6) \quad \psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots$$

Tragen wir dies in (1) ein und berücksichtigen wir die unter (3) und (4) festgestellte Größenordnung der Korrektionsglieder, so erhalten wir sukzessive die folgenden Bestimmungsgleichungen für  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$

$$(7) \quad D \psi_0 = 0, \quad D = \mathcal{D} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} (\epsilon^2 - 2 \epsilon V - E_0^2),$$

$$(8) \quad D \psi_1 = \frac{\gamma_4}{\hbar c} (\vec{\gamma} \operatorname{grad} V) \psi_0,$$

$$(9) \quad D \psi_2 = \frac{\gamma_4}{\hbar c} (\vec{\gamma} \operatorname{grad} V) \psi_1 - \frac{V^2}{\hbar^2 c^2} \psi_0.$$

Während, wie wir sahen, (7) die gewöhnliche homogene Schrödingergleichung war, sind (8) und (9) inhomogene Schrödingergleichungen; ihre rechten Seiten sind jeweils aus den vorangehenden Näherungen

zu entnehmen; der Vorzug der iterierten Diracgleichung (im Gegensatz zu der Diracgleichung erster Ordnung) besteht darin, daß die höheren Näherungen an die Lösung der gewöhnlichen Schrödinger-Gleichung sukzessive angeschlossen werden können.

Es ist für das Folgende bequem, statt  $\psi_1$  eine Vektorhilfsgröße  $\vec{\varphi}$  einzuführen durch die Gleichungen

$$(10) \quad \begin{cases} \psi_1 = \gamma_4 (\vec{\gamma} \vec{\varphi}), \\ D \vec{\varphi} = \frac{1}{\hbar c} \operatorname{grad} V \cdot \psi_0. \end{cases}$$

In dieser letzten Differentialgleichung kommen die  $\gamma$  nicht mehr vor. Entsprechend läßt sich die Differentialgleichung für  $\psi_2 \dots$   $\gamma$ -frei machen.

Wir haben also das Integrationsgeschäft vollständig getrennt von der Bestimmung der  $\gamma$ -Abhängigkeit unserer Lösung. Die letztere ist am Schlusse vorzunehmen und so einzurichten, daß unsere Lösung nicht nur der iterierten Diracgleichung genügt, sondern auch der engeren Diracgleichung erster Ordnung. Auch die nullte Näherung  $\psi_0$  ist dabei mit einem  $\gamma$ -Faktor zu versehen.

### § 2. Berechnung der ersten Näherung

Neben der speziellen Lösung  $\psi_0$  nullter Näherung von der Energie  $\epsilon$  betrachten wir ein allgemeines Lösungssystem  $\Psi_0$ , welches derselben Differentialgleichung  $D = 0$  wie  $\psi_0$  genügt, aber mit anderer Energie  $E$ . Wir setzen dieses Lösungssystem als vollständig im Sinne des nächsten Paragraphen voraus.

Ebenso wie  $\Psi_0$  genügt die konjugierte Funktion  $\Psi_0^*$  formell derselben Differentialgleichung wie  $\psi_0$ . Wir haben

$$(11) \quad D \psi_0 = 0, \quad D = \Delta + \frac{1}{\hbar^2 c^2} (\epsilon^2 - 2 \epsilon V - E_0^2),$$

$$(12) \quad D \Psi_0^* = 0, \quad D = \Delta + \frac{1}{\hbar^2 c^2} (E^2 - 2 E V - E_0^2)$$

und bilden

$$(13) \quad \begin{cases} \Psi_0^* D \psi_0 - \psi_0 D \Psi_0^* = \Psi_0^* \Delta \psi_0 - \psi_0 \Delta \Psi_0^* \\ \quad + \frac{\epsilon - E}{\hbar^2 c^2} \Psi_0^* (\epsilon + E - 2 V) \psi_0. \end{cases}$$

Die linke Seite ist 0 wegen (11, 12). Auf der rechten Seite zerstören sich die beiden ersten Glieder, wenn wir eine Integration  $d\tau$  über den unendlichen Raum ausführen (Reduktion auf ein Oberflächenintegral im Unendlichen) und man erhält, wenn  $\epsilon \neq E$  ist:

$$(14) \quad \int \Psi_0^* (\epsilon + E - 2 V) \psi_0 d\tau = 0.$$

Dies ist die Orthogonalitätsbedingung<sup>1)</sup> für die Gleichung  $D = 0$ . Sofern das System der  $\Psi_0$  vollständig ist, gilt aber auch der umgekehrte Satz: Wenn für eine Funktion  $\mathfrak{f}$  und alle Individuen des Funktionssystems  $\Psi_0$  gilt:

$$(15) \quad \int \Psi_0^* (\epsilon + E - 2V) \mathfrak{f} d\tau = 0,$$

es sei denn, daß  $\epsilon = E$  ist, dann ist  $\mathfrak{f}$  eine Lösung von (11).

Wir gehen zur ersten Näherung  $\psi_1$  über, bzw. zu der damit gleichwertigen Vektorfunktion  $\varphi$ , Gl. (10) (den Pfeil über  $\varphi$  lassen wir fort). Wir haben jetzt:

$$(16) \quad D \varphi = \frac{1}{\hbar c} \operatorname{grad} V \cdot \psi_0, \quad D = \mathcal{A} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} (\epsilon^2 - 2\epsilon V - E_0^2),$$

$$(17) \quad D \Psi_0^* = 0, \quad D = \mathcal{A} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} (E^2 - 2EV - E_0^2)$$

und bilden wie in (13):

$$\Psi_0^* D \varphi - \varphi D \Psi_0^* = \dots + \frac{\epsilon - E}{\hbar^2 c^2} \Psi_0^* (\epsilon + E - 2V) \varphi.$$

Die durch ... angedeuteten Glieder fallen wieder bei der Integration über  $d\tau$  fort, aber die linke Seite verschwindet jetzt nicht. Man erhält vielmehr wegen (16):

$$(18) \quad \frac{1}{\hbar c} \int \Psi_0^* \operatorname{grad} V \cdot \psi_0 d\tau = \frac{\epsilon - E}{\hbar^2 c^2} \int \Psi_0^* (\epsilon + E - 2V) \varphi d\tau.$$

Hier läßt sich die linke Seite so umformen, daß sie mit dem Integral der rechten Seite vereinigt werden kann. Wir bilden zu dem Ende

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_0^* \operatorname{grad} D \psi_0 - D \Psi_0^* \operatorname{grad} \psi_0 = \dots \\ \quad + \frac{\epsilon - E}{\hbar^2 c^2} \Psi_0^* (\epsilon + E - 2V) \operatorname{grad} \psi_0 - \Psi_0^* \frac{2\epsilon}{\hbar^2 c^2} \operatorname{grad} V \psi_0. \end{array} \right.$$

Die durch ... angedeuteten Glieder können wegen der Vertauschbarkeit von  $\mathcal{A}$  und  $\operatorname{grad}$  geschrieben werden

$$\Psi_0^* \mathcal{A} \operatorname{grad} \psi_0 - \mathcal{A} \Psi_0^* \operatorname{grad} \psi_0$$

und verschwinden daher abermals bei der Integration nach  $d\tau$ . Die linke Seite von (19) verschwindet wegen (11), (12). Das letzte Glied rechts in (19) röhrt daher, daß bei der Bildung des Gradienten von  $D \psi_0$  nicht nur  $\psi_0$ , sondern auch die in  $D$  vorkommende

1) Es ist bekannt, daß die Orthogonalitätsbedingung für die relativistische Schrödinger-Gleichung von derjenigen für die unrelativistische verschieden ist, vgl. z. B. die damit zusammenhängende Form des Viererstroms in „Wellenmech. Ergbd.“ S. 127, Gl. (25). Wir möchten aber nicht unerwähnt lassen, daß wir bei Gelegenheit eines ähnlichen Problems auf Gl. (14) durch einen Brief von Herrn K. Bechert hingewiesen wurden.

Funktion  $V$  differentiiert werden muß. Man erhält aus (19) durch die besagte Integration<sup>1)</sup>

$$(20) \frac{2\varepsilon}{\hbar^2 c^2} \int \Psi_0^* \operatorname{grad} V \psi_0 d\tau = \frac{\varepsilon - E}{\hbar^2 c^2} \int \Psi_0^* (\varepsilon + E - 2V) \operatorname{grad} \psi_0 d\tau.$$

Mithin kann (18) umgeformt werden in

$$(21) \frac{\varepsilon - E}{\hbar^2 c^2} \int \Psi_0^* (\varepsilon + E - 2V) \left( \varphi - \frac{\hbar c}{2\varepsilon} \operatorname{grad} \psi_0 \right) d\tau = 0.$$

Jetzt können wir unseren Satz aus Gl. (15) anwenden und schließen: Die letzte Klammer unter dem Integral (21) ist eine Lösung von  $D\psi = 0$  für den Eigenwert  $\varepsilon$ . Bezeichnen wir sie mit  $X$ , so haben wir also

$$(22) \varphi = \frac{\hbar c}{2\varepsilon} \operatorname{grad} \psi_0 + X.$$

Die fragliche Zusatzlösung  $X$  ist so zu bestimmen, daß  $\varphi$  1. klein von erster Ordnung im Sinne unseres Näherungsansatzes ist und daß

2. die bei  $\psi_0$  vorgeschriebenen Grenzbedingungen auch von  $\psi_0 + \psi_1$  erfüllt werden.

Die Bestimmung der Zusatzlösung  $X$  lässt sich daher nur im speziellen durchführen. Immerhin können wir konstatieren: *Es gelingt, die Integration der (iterierten) Diracgleichung in erster Näherung an die Lösung  $\psi_0$  nullter Näherung anzuschließen, d. h. auf die Integration der Schrödingergleichung zurückzuführen.*

Unser Näherungsverfahren bedeutet eine Entwicklung nach  $\alpha Z$ . Es ist verschieden von dem bekannten Paulischen Verfahren<sup>2)</sup>, welches eine Entwicklung nach  $\beta = \frac{v}{c}$  bedeutet. Die Größe von  $\beta$  ist in unserer Näherung nicht beschränkt, da ihr durch Vermittelung der relativistischen Masse  $m$  und der bei Gl. (5) definierten Größe  $W$  in der Lösung nullter Näherung Rechnung getragen wird.

1) Gl. (20) ist nichts anderes als der wellenmechanisch umgedeutete Impulsatz. Das Integral links ist bis auf das Vorzeichen das wellenmechanische Mittel der Kraft  $-\operatorname{grad} V$  bezüglich der beiden Zustände  $\psi_0, \Psi_0$ . Das Integral rechts zusammen mit dem Faktor  $\varepsilon - E$  ist die zeitliche Ableitung des wellenmechanisch gemittelten Impulses

$$\int \Psi_0^* \left( \frac{\hbar}{i} \right) \operatorname{grad} \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar} (\varepsilon - E) t} d\tau$$

ebenfalls bis auf das Vorzeichen und unter Weglassung der Zeitabhängigkeit; die beiden Faktoren  $2\varepsilon$  links und  $\varepsilon + E - 2V$  rechts werden in unrelativistischer Näherung beide gleich  $2E_0$ , bedeuten also eine relativistische Verschärfung der Mittelbildung.

2) W. Pauli, Ztschr. f. Phys. 43. S. 601. 1927.

V  
2  
2  
1  
9  
3  
5  
XUM

Es ist uns nicht (oder nur teilweise) gelungen, die nächste Näherung  $\psi_2$  in derselben Allgemeinheit zu berechnen, d. h. im Sinne von Gl. (9) auf  $\psi_0$  und  $\psi_1$  zurückzuführen.

§ 3. Entwicklung einer beliebigen Funktion nach Eigenfunktionen nullter Näherung

Es handele sich um ein beliebiges orthogonalisiertes System von Eigenfunktionen.

Es wurde bereits gezeigt, daß die Orthogonalitätsbeziehung, die zu unserem Eigenwertproblem gehört, den Gewichtsfaktor  $\epsilon + E - 2V$  enthält, wobei  $\epsilon$  und  $E$  die Energien der beiden Zustände sind, deren Orthogonalitätsintegral wir betrachten [vgl. (14)]. Das Besondere hieran ist *nicht* das Auftreten einer Gewichtsfunktion an und für sich, sondern der Umstand, daß die Gewichtsfunktion von der Energie der betrachteten Zustände abhängt. Das hat einige Änderungen der Verhältnisse bei der Entwicklung einer Funktion nach Eigenfunktionen zur Folge.

Neben die Differentialgleichung  $D = 0$  [Gl. (11)] stellen wir die zeitabhängige Gleichung, die wir aus der relativistischen Schrödinger-Gleichung durch Weglassen des Gliedes mit  $V^2$  erhalten:

$$(23) \quad \left\{ D - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2V}{\hbar c} \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} - \left( \frac{E_0}{\hbar c} \right)^2 \right\} u = 0.$$

Wir können nach einer Lösung  $u(\mathbf{r}, t)$  dieser Gleichung fragen, die den Anfangsbedingungen:

$$(24) \quad u(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}), \quad - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(\mathbf{r})$$

genügt bei willkürlichem  $f(\mathbf{r})$  und  $g(\mathbf{r})$ . Von einem vollständigen Funktionssystem  $\Psi_0$  verlangen wir, daß jede Lösung von (23) sich aus

monochromatischen Lösungen  $\Psi_0 e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$  aufbauen läßt. Wir schreiben die betreffende Formel als Integral, da wir uns in dem folgenden Beispiel speziell für den kontinuierlichen Teil des Spektrums interessieren werden, bemerken aber, daß im allgemeinen eine Summe über das diskrete Spektrum hinzuzufügen ist. Die Integrationsvariable nennen wir  $\vec{K}$ ; die Bezeichnung ist dem folgenden Beispiel zuliebe ( $\vec{K}$  = Wellenzahl) gewählt.  $\vec{K}$  hat Vektorcharakter (dreifache Integration nach  $K_x, K_y, K_z$ ) derart, daß die in der skalaren Energieskala der  $E$  enthaltene Entartung räumlich aufgehoben wird. Wir schreiben also:

$$(25) \quad u(\mathbf{r}, t) = \int d\vec{K} A(\vec{K}) \Psi_0 e^{-\frac{iEt}{\hbar}}.$$

Damit die Bedingungen (24) erfüllt werden, müssen die Koeffizienten  $A(\vec{K})$  in (25) den beiden Gleichungen genügen

$$(26) \quad f(\mathbf{r}) = \int d\vec{K} A(\vec{K}) \Psi_0, \quad g(\mathbf{r}) = \int d\vec{K} A(\vec{K}) E \Psi_0.$$

Wir wollen hieraus die  $A(\vec{K})$  berechnen. Dazu bilden wir:

$$(27) \quad \int d\tau \Psi_0^* [g(\mathbf{r}) + (E - 2V)f(\mathbf{r})].$$

$\Psi_0^*$  gehöre zu einem Parameterwerte  $\vec{K}$ , den wir im folgenden festhalten werden.  $E$  sei der zugehörige feste Wert der Energie. Wenn wir  $f$  und  $g$  aus (26) in (27) einsetzen wollen, müssen wir für das dortige veränderliche  $\vec{K}$  und  $E$  schreiben  $\vec{K}'$  und  $E'$ . Wir erhalten so:

$$(28) \quad \int d\tau \Psi_0^* \int d\vec{K}' A(\vec{K}') (E' + E - 2V) \Psi_0(\vec{K}').$$

Vertauschen wir die Integrationsfolge, so verschwindet das Integral  $d\tau$  für alle  $E' \neq E$  wegen der Orthogonalitätsbedingung (14). Wir wollen aber, über (14) hinausgehend annehmen, daß die Orthogonalisierung der  $\Psi_0$  nicht nur in der entarteten Skala der Energie, sondern auch in der die Entartung auflösenden Skala der  $\vec{K}$  vollständig durchgeführt sei. Dann verschwindet das Integral  $d\tau$  in (28) sogar für alle  $\vec{K}' \neq \vec{K}$ . Wir brauchen also das Integral nach  $\vec{K}'$  nur über eine kleine Umgebung  $\Delta K$  von  $\vec{K}$  zu erstrecken und können  $A(\vec{K}')$  mit  $\vec{K}' = \vec{K}$  vor das Integral nach  $\vec{K}'$  ziehen. Sind die  $\Psi_0$  als kontinuierliche Eigenfunktionen normiert durch

$$(29) \quad \int \Psi_0^*(\vec{K}, \tau) d\tau \int_{\Delta K} (E + E' - 2V) \Psi_0(\vec{K}', \tau) d\vec{K}' = 1,$$

so reduziert sich (28) einfach auf  $A(\vec{K})$ , und wir haben, da (28) und (27) identisch waren:

$$(30) \quad A(\vec{K}) = \int d\tau \Psi_0^* [g(\mathbf{r}) + (E - 2V)f(\mathbf{r})].$$

Wir können jetzt leicht die im vorigen Paragraphen aus (15) gezogenen Schlüsse verstehen. Wenn die Funktion  $u(\mathbf{r}, t)$  in (25) nicht aus einem Aggregat aller möglichen Funktionen  $\Psi_0$ , sondern nur aus Eigenfunktionen besteht, die zur Energie  $\epsilon$  gehören, so wird in (24)

$$g(\mathbf{r}) = \epsilon f(\mathbf{r}), \quad f(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}, 0).$$

V  
2  
2  
1  
9  
3  
5  
XUM

Gleichzeitig müssen alle  $A(\vec{K})$  verschwinden, für die  $E \neq \varepsilon$  ist, und man hat wegen (30)

$$(31) \quad \int \Psi_0^*(\varepsilon + E - 2V)f(\tau) d\tau = 0 \quad \text{für } E \neq \varepsilon.$$

*Umgekehrt:* Wenn (31) erfüllt ist und wenn man  $g(\tau) = \varepsilon f(\tau)$  vorschreibt, so verschwinden nach (30) alle  $A(\vec{K})$  für  $E \neq \varepsilon$ ; (25) kann dann nur solche Glieder enthalten, für die  $E = \varepsilon$  ist. Infolgedessen genügt  $f(\tau) = u(\tau, 0)$  der Differentialgleichung  $D = 0$  mit dem Energiewert  $\varepsilon$ .

#### § 4. Beispiel:

##### Die elastische Streuung von Elektronen am Coulombfelde eines Kerns

Eine für den ganzen Raum gültige Lösung dieses Problems gaben vom Standpunkte der Schrödingergleichung zuerst W. Gordon<sup>1)</sup> und N. F. Mott<sup>2)</sup>, indem sie die Funktion zunächst in Polarkoordinaten durch eine Reihe nach Kugelfunktionen darstellten; zur Diskussion (z. B. Ableitung der Rutherford'schen Streuformel) mußte diese Reihe in etwas mühsamer Weise summiert werden. Gordon bemerkte aber in einem Zusatz zu seiner Arbeit, daß man einfacher zum Ziele gelangt, wenn man parabolische Koordinaten benutzt. Dieser Weg wurde begangen von G. Temple<sup>3)</sup> und A. Sommerfeld<sup>4)</sup> und führte zu der einfachen Formel

$$(32) \quad \psi = e^{ikz} L_n(ik\eta).$$

Der erste Faktor bedeutet die aus der negativen  $x$ -Richtung einfallende ebene Elektronenwelle ( $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{Wellenzahl}$ ). Der zweite Faktor trägt der Streuung am Kern Rechnung.  $L_n$  ist die überall endliche Lösung der Laguerreschen Differentialgleichung vom Parameter

$$(33) \quad n = \frac{Z}{ik a}, \quad a = \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad Z = \text{Kernladungszahl};$$

die Entwicklung von  $L_n(u)$  im Nullpunkt lautet

$$(34) \quad L_n(u) = 1 - \binom{n}{1} \frac{u}{1!} + \binom{n}{2} \frac{u^2}{2!} - \dots$$

In (32) bedeutet  $\eta$  die zweite der parabolischen Koordinaten

$$(35) \quad \xi = r + x, \quad \eta = r - x.$$

1) W. Gordon, Ztschr. f. Phys. 48, S. 180. 1928.

2) N. F. Mott, Proc. R. Soc. 118, S. 542. 1928.

3) G. Temple, Proc. R. Soc. 121, S. 673. 1928.

4) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. (5) 11, S. 257. 1931 (im Text als a. a. O. zitiert).

Bei allgemeiner, durch den Vektor  $\vec{k}$  gegebener Einfallrichtung wird das Argument von  $L$  in (32)

$$(36) \quad u = i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\vec{k} \cdot \vec{r}))$$

und  $L$  schreibt sich

$$(32a) \quad \psi = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} L_n(u).$$

Die durch (32), (32a) gegebene Funktion  $\psi$  kann aufgefaßt werden als spezielle *Eigenfunktion des kontinuierlichen Wasserstoffspektrums in parabolischen Koordinaten* (gehörige Normierung vorausgesetzt). Das Energieniveau dieser Eigenfunktion wird gegeben durch  $k$  bzw.  $n$ ; beim Übergang zum diskreten Spektrum entspricht dem imaginären Parameter  $n$  die reelle Hauptquantenzahl  $n$ . Drückt man  $k$  nach de Broglie durch die Geschwindigkeit  $v = \beta c$  des einfallenden Elektrons aus, so erhält man leicht aus (33)

$$(37) \quad n = \frac{\alpha Z}{i\beta}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}.$$

Von (32) gelangen wir zur nullten Näherung  $\psi_0$  unseres relativistischen Problems auf dem bei Gl. (5) angegebenen Wege. Dabei bleibt die Form (32) erhalten, wenn wir (37) als allgemein gültige Definition für  $n$  ansehen und beachten, daß in die Wellenzahl  $k$  mittels der de Broglieschen Beziehung die relativistische Masse eingeht. Gl. (5) lautet dann nämlich, unter Verwendung von  $k$  und  $n$  geschrieben,

$$(5a) \quad \Delta \psi + \left( k^2 + \frac{2i k n}{r} \right) \psi = 0,$$

was mit der Schrödinger-Gleichung *formell* übereinstimmt.

Unsere geschlossene Darstellung (32) entspricht der bekannten Tatsache, daß sich die Schrödinger-Gleichung ebensowohl in parabolischen wie in Polarkoordinaten separieren läßt. Für die Dirac-Gleichung ist dies nicht der Fall; auch die relativistische Keplerbewegung der älteren Theorie ließ sich ja *nur* in Polarkoordinaten separieren. Deshalb gehen die bisherigen Darstellungen der relativistischen Kernstreuung von Polarkoordinaten aus und benutzen bei der Diskussion Summationsformeln derselben Art, wie sie Gordon für das unrelativistische Problem entwickelt hatte, vgl. O. Scherzer<sup>1</sup>), J. Meixner<sup>2</sup>), Furry<sup>3</sup>).

1) O. Scherzer, Ann. d. Phys. [5] **13**. S. 137. 1932. Die Formel für die Streuwellen ist nicht angegeben, liegt aber den Ergebnissen des Schlußabsatzes zugrunde.

2) J. Meixner, Ztschr. f. Phys. **90**. S. 312. 1934.

3) W. H. Furry, Phys. Rev. **46**. S. 391. 1934.

V  
2  
2  
1  
9  
3  
5  
XUM

Demgegenüber kommen wir hier ohne irgendwelche Spezialisierung des Koordinatensystems, durch bloße Anwendung der Gl. (22) zum Ziele. Es ist dabei bequem, die allgemeine Schreibweise (32a) mit beliebiger Einfallsrichtung des Elektrons zu verwenden. (22) wird dann:

$$(38) \quad \varphi = \frac{i\beta}{2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \left( \frac{\vec{k}}{k} L + \left( \frac{\tau}{r} - \frac{\vec{k}}{k} \right) L' \right) + X.$$

Hier ist  $L'$  die Ableitung von  $L$  nach dem Argument. Außerdem ist im konstanten Faktor, ähnlich wie bei (37) die Beziehung benutzt:

$$(39) \quad \frac{\hbar c}{e} k = \frac{v}{c} = \beta.$$

Wir haben jetzt  $X$  zu bestimmen. Dazu berücksichtigen wir zunächst Bedingung 1 von S. 633. Aus der Reihe (34) erkennen wir, daß  $L'$  den Faktor  $n$  enthält. Wegen (37) enthält dann das Glied mit  $L'$  in (38) den Faktor

$$(39a) \quad i\beta n = \alpha Z,$$

ist also von der gewünschten Größenordnung. Das Glied mit  $L$  dagegen genügt nicht unserer Forderung 1. Es ist bis auf einen konstanten Faktor gleich  $\psi_0$ . Da es somit eine Lösung der homogenen Gleichung  $D = 0$  ist, können wir  $X$  so wählen, daß in (38) nur das Glied mit  $L'$  stehen bleibt. Dann haben wir unsere 1. Bedingung für  $\varphi$  erfüllt. Also:

$$(40) \quad \varphi = \frac{i\beta}{2} \left( \frac{\tau}{r} - \frac{\vec{k}}{k} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} L_n'.$$

Um die Bedingung 2 von S. 633 für unsren Fall näher zu präzisieren, haben wir das asymptotische Verhalten von  $\varphi$  zu prüfen. Wir benutzen die Formeln a. a. O. (48), (51) und (52) und haben, wenn wir jeweils nur das erste Reihenglied berücksichtigen:

$$(41) \quad L_n(u) \sim e^{-i\pi n} \left\{ \frac{u^n}{\Gamma(1+n)} + \frac{n e^n}{\Gamma(1-n)} (-u)^{-n-1} \right\}.$$

Differentiation liefert, wenn wir Glieder der Ordnung  $u^{-2}$  weglassen:

$$(42) \quad L_n'(u) \sim e^{-i\pi n} \cdot n \left\{ \frac{u^{n-1}}{\Gamma(1+n)} + \frac{e^n (-u)^{-n-1}}{\Gamma(1-n)} \right\}.$$

(40) wird, wenn wir für  $u$  seinen Wert (36) einführen und (39a) benutzen

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \sim \frac{\alpha Z}{2} \left( \frac{\tau}{r} - \frac{\vec{k}}{k} \right) e^{-i\pi n} \\ \cdot \frac{\left( ik r - i(\vec{k} \cdot \vec{r}) \right)^{n-1}}{\Gamma(1+n)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} + \frac{(-ikr + i(\vec{k} \cdot \vec{r}))^{-n-1}}{\Gamma(1-n)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \end{array} \right.$$

Das erste Klammerglied, die ebene Welle verschwindet für  $r \rightarrow \infty$  das zweite, die Kugelwelle, ist eine auslaufende Welle. Das sind genau diejenigen Forderungen, die wir nach der Bedingung 2 zu stellen haben: Die durch  $\psi_0$  dargestellte ebene Welle soll im Unendlichen durch unsere Korrektion nicht abgeändert werden; die „Ausstrahlungsbedingung“, der  $\psi_0$  nach Abzug der ebenen Welle im Unendlichen genügt (a. a. O. § 2), soll auch von  $\psi_1$  und daher von  $\varphi$  erfüllt werden.

Die gesamte Lösung erster Näherung lautet jetzt nach (6) und (10), wenn wir sie noch von rechts mit einem Faktor  $\Gamma$  multiplizieren, dessen Bedeutung wir sogleich besprechen:

$$(44) \quad \psi = \psi_0 + \psi_1 = \{\psi_0 + \gamma_4 (\vec{\gamma} \varphi)\} \Gamma.$$

Hierin ist  $\psi_0$  durch (32a) und  $\varphi$  durch (40) gegeben.

$\Gamma$  soll so bestimmt werden, daß (44) nicht nur die iterierte, sondern auch die engere lineare Diracgleichung näherungsweise erfüllt. Um das zu erreichen, genügt es zu verlangen, daß (44) in großem Kernabstand, wo es sich nahezu wie eine ebene Welle verhält:

$$(45) \quad \psi \sim e^{i(\vec{k} \cdot r)} \Gamma$$

die lineare Diracgleichung

$$(46) \quad \left\{ (\vec{\gamma} \text{ grad}) - \frac{\gamma_4}{\hbar c} \epsilon + \frac{E_0}{\hbar c} \right\} \psi = 0$$

erfüllt. Aus (45), (46) ergibt sich für  $\Gamma$  die Forderung:

$$(47) \quad \left\{ i (\vec{\gamma} \vec{k}) - \frac{\gamma_4}{\hbar c} \epsilon + \frac{E_0}{\hbar c} \right\} \Gamma = 0.$$

Unsere durch (44) und (47) gegebene Lösung stimmt mit den genannten Arbeiten von Scherzer, Meixner und Furry überein.

Außer der Eigenfunktion (44) brauchen wir zur Berechnung der eigentlichen physikalischen Größen (Strom, Dichte usw.) die zugehörige Lösung der adjungierten Gleichung. Diese erhalten wir nach der Vorschrift<sup>1)</sup>: Der Übergang zum adjungierten Ausdruck in einem Produkt erfolgt durch Übergang zum adjungierten in den einzelnen Faktoren und Umkehr ihrer Reihenfolge. Bei  $\gamma$ -freien Größen ist das Adjungierte das konjugiert Komplexe, bei  $\gamma$ -Zahlen gilt, wenn wir die adjungierte Größe durch Überstreichen kennzeichnen:

$$(48) \quad \overline{\vec{\gamma}} = -\vec{\gamma}, \quad \overline{\gamma_4} = \gamma_4.$$

1) Vgl. z. B. F. Sauter, Ann. d. Phys. [5] 9. S. 235. 1931.

Demnach haben wir nach (44):

$$(49) \quad \bar{\psi} = \bar{\Gamma} \{ \psi_0^* - (\vec{\gamma} \vec{\varphi}^*) \gamma_4 \}$$

und nach (47):

$$(50) \quad \bar{\Gamma} \left\{ i (\vec{\gamma} \vec{k}) - \frac{\gamma_4}{\hbar c} \epsilon + \frac{E_0}{\hbar c} \right\} = 0.$$

Zwischen  $\Gamma$  und  $\bar{\Gamma}$  besteht eine Beziehung, welche gleichbedeutend ist mit dem bekannten Zusammenhang zwischen Strom- und Ladungsdichte bei der ebenen Welle, nämlich

$$(51) \quad i \vec{\Gamma} \vec{\gamma} \Gamma = \beta \cdot \frac{\vec{k}}{k} \cdot \bar{\Gamma} \gamma_4 \Gamma.$$

Zum Beweise multiplizieren wir (47) von links mit  $\bar{\Gamma} \vec{\gamma} \gamma_4$  und (50) von rechts mit  $\gamma_4 \vec{\gamma} \Gamma$ . Dann addieren wir beide Gleichungen und erhalten unter Benutzung der Multiplikationsregeln für die  $\gamma$  die Beziehung:

$$(52) \quad -i \vec{k} \bar{\Gamma} \gamma_4 \Gamma - \frac{\epsilon}{\hbar c} \bar{\Gamma} \vec{\gamma} \Gamma = 0$$

(52) ist wegen (39) mit (51) identisch. Wir werden im folgenden mit (51) als einziger Aussage über die Eigenschaften der  $\Gamma$ ,  $\bar{\Gamma}$  auskommen.

Als Anwendung wollen wir die Streuintensität in großer Entfernung vom Kern berechnen. Wir bilden zu diesem Zwecke aus (44) und (49) den Ausdruck für die Ladungsdichte:

$$(53) \quad \bar{\psi} \gamma_4 \psi = \bar{\Gamma} \{ \psi_0^* - (\vec{\gamma} \vec{\varphi}^*) \gamma_4 \} \gamma_4 \{ \psi_0 + \gamma_4 (\vec{\gamma} \vec{\varphi}) \} \Gamma$$

(53) lässt sich mit Rücksicht auf (51) ausrechnen. Unter Verwendung der Abkürzung  $\bar{\Gamma} \gamma_4 \Gamma = N$  (Normierungsfaktor) haben wir:

$$(54) \quad \bar{\psi} \gamma_4 \psi = N \left\{ |\psi_0|^2 + i \beta \left( \frac{\vec{k}}{k}, \vec{\varphi}^* \psi_0 - \psi_0^* \vec{\varphi} \right) + |\vec{\varphi}|^2 \right\}.$$

Dabei wurden drei Glieder, die mit Komponenten von  $[\vec{\varphi}^*, \vec{\varphi}]$  multipliziert sind, weggelassen, weil, wie man aus (40) sieht,  $\vec{\varphi}^*$  und  $\vec{\varphi}$  gleichgerichtete Vektoren sind.

Aus (54) wird mit (32a) und (40):

$$(54a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi} \gamma_4 \psi = N \cdot \left\{ |L|^2 + \frac{\beta^2}{2} \left( \frac{(\vec{k} \cdot \vec{r})}{kr} - 1 \right) (L'^* L + L^* L) \right. \\ \quad \left. + \frac{\beta^2}{2} \left( 1 - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{r})}{kr} \right) |L'|^2 \right\}. \end{array} \right.$$

Wir betrachten *erstens* den Bestandteil  $I_0$  von (54a), der der einfallenden ebenen Welle entspricht. Nach der asymptotischen Darstellung (41) ( $n$  und  $u$  rein imaginär,  $u \rightarrow \infty$ ) wird:

$$(55) \quad \frac{I_0}{N} \sim |L|^2 \sim \frac{e^{-2i\pi n} \cdot i^{2n}}{|\Gamma(1+n)|^2} = \frac{e^{-i\pi n}}{|\Gamma(1+n)|^2}.$$

*Zweitens* betrachten wir die Dichte  $I$  der gestreuten Kugelwelle und verwenden dementsprechend in (41) und (42) nur je das zweite Klammerglied. Wir erhalten:

$$(56) \quad \frac{I}{N} \sim \frac{e^{-i\pi n}}{|\Gamma(1-n)|^2} \frac{|n|^2}{|u|^2} \left( 1 + \frac{\beta^2}{2} \left( \frac{(\vec{k} r)}{kr} - 1 \right) \right).$$

Wir führen den Streuwinkel  $\vartheta$  ein und haben dann:

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(\vec{k} r)}{kr} - 1 = \cos \vartheta - 1 = -2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ |u|^2 = 4 k^2 r^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}. \end{array} \right.$$

Weitere Ausrechnung unter Verwendung von (39) und (37) gibt:

$$(58) \quad |u|^2 = \frac{4 \varepsilon^2 v^2}{\hbar^2 c^4} r^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2} = \left( \frac{2 m_0 v}{\hbar} \right)^2 \cdot \frac{v^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}{1 - \beta^2},$$

$$(59) \quad |n|^2 = \left( \frac{\alpha Z}{\beta} \right)^2 = \left( \frac{e^2 Z}{\hbar v} \right)^2.$$

Mit (55) wird schließlich aus (56):

$$(60) \quad I = \frac{I_0}{r^2} \left( \frac{e^2 Z}{2 m_0 v^2} \right)^2 \cdot \frac{(1 - \beta^2) \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Das ist die relativistisch korrigierte Rutherfordformel, die von Mott<sup>1)</sup> und Sauter<sup>2)</sup> unter der Voraussetzung  $|n| \ll 1$  (Born'sche Näherung) abgeleitet wurde.

Unser Näherungsverfahren reicht in seiner Anlage zunächst weiter. Wir überzeugen uns aber davon, daß auch unsere Ableitung von (60) nur unter dieser Annahme korrekt ist. Das Glied mit  $\beta^2$  in (56) wäre nämlich eigentlich wegen  $|n|^2 \beta^2 = \alpha^2 Z^2$  als Glied 2. Ordnung im Sinne unserer Näherung zu vernachlässigen. Nur, wenn  $n$  auch klein ist, darf es stehen bleiben, weil dann das in nächster Näherung hinzutretende Glied  $\psi_0 \psi_2$  von höherer als zweiter Ordnung klein wird.

1) N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. (A) 124, S. 425. 1929.

2) F. Sauter, Ztschr. f. Phys. 86, S. 818. 1933.

Unsere Methode liefert für die Streuintensität am Coulombfeld gegenüber der Bornschen Näherung kein neues Ergebnis. Anders ausgedrückt: Unsere Eigenfunktion geht asymptotisch für großen Kernabstand in die der Bornschen Näherung über.

Der Verlauf der beiden Wellenfunktionen in Kernnähe ist aber verschieden. Die Bornsche Näherung ist gültig für  $\alpha^2 Z^2 \ll \beta^2$ , unsere für  $\alpha^2 Z^2 \ll 1$ .

#### **Zusammenfassung**

Es wird ein Näherungsverfahren zur Lösung der Diracschen Wellengleichung des Elektrons angegeben, welches nach Potenzen der Feinstrukturkonstanten fortschreitet. Man geht von der iterierten Diracgleichung aus und führt das Problem auf die sukzessive Lösung von inhomogenen Schrödinger-Gleichungen zurück; die Energie des Elektrons unterliegt dabei keinen Beschränkungen. Die erste Näherung lässt sich durch Differentiation aus der nullten Näherungslösung gewinnen, was unter Verwendung der Vollständigkeit des Funktionensystems nullter Näherung gezeigt wird. Die Methode wird auf das Problem der Beugung einer ebenen Elektronenwelle im Coulombfeld eines Atomkerns angewandt.

München, Institut für theoretische Physik der Universität.

(Eingegangen 8. März 1935)

## Radiometerkraft und Apparatdimensionen

Von Rasmus E. H. Rasmussen

(Mit 7 Figuren)

Bekanntlich ist die Radiometerkraft vom Gasdruck, von den Temperaturdifferenzen und den geometrischen Verhältnissen des Apparates abhängig.

Im folgenden werden Messungen der Radiometerkraft an einseitig geschwärzten Platinbändern beschrieben, und es wird untersucht, wie die Radiometerkraft mit der Breite des Bandes  $B$  und der Größe des Behälters, in dem sich das Band befindet, variiert.

Die Arbeit wurde in Prof. Martin Knudsens Laboratorium ausgeführt als eine Art Weiterführung von Prof. Knudsens Untersuchungen über „Radiometerkraft und Akkommakationskoeffizient“<sup>1)</sup>. Dabei wurde seine in der erwähnten Arbeit beschriebene Methode zur Messung der Radiometerkräfte unverändert angewandt.

### Apparate

Fig. 1 zeigt einen senkrechten Querschnitt durch den Apparat, mit dessen Hilfe untersucht wurde, wie die Radiometerkraft von der Größe des Behälters abhängig ist.

Das Platinband  $PP_1$ , dessen eine Seite mit Platin schwarz geschwärzt ist, während die andere Seite blank blieb, ist an die beiden Kupferdrähte  $K_1$  und  $K_2$  angelötet.

$K_1$  führt isoliert und luftdicht durch die dicke Messingplatte  $Bp$  mittels einer mit Picein gedichteten Glasröhre  $G$ .

$K_2$  ist an einem aus den drei Messingstangen  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_0$  gebildeten Rahmen befestigt und befindet sich also in elektrisch leitender Verbindung mit  $Bp$ .

Um  $PP$  lassen sich kupferne Zylinder von verschiedenem Diameter anbringen.

Fig. 1 zeigt einen der vier verwendeten Zylinder  $C$ ; der Zylinder steht auf der Bodenplatte  $Bp$  und wird oben durch ein waagerechtes Querstück gestützt, das durch ein Paar Mutterschrauben von  $M_1$  und  $M_2$  festgespannt wird.

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. [5] 6. S. 129. 1930.

Das Ganze wird von einem Glaszyylinder *Gl* umgeben, der durch Picein an die Bodenplatte festgekittet ist.

Eine Glasröhre, die in der Figur nicht angegeben ist, führt von diesem Apparat zum Pipettensystem und zur Pumpe; in dieser Glasröhre ist eine Luftfalle, die während der Messungen durch flüssige Luft stets abgekühlt war.

Die Temperatur des Kupferzyinders *C* wurde an einem Quecksilberthermometer *Tm* abgelesen, dessen Behälter mit etwas Woodschem Metall in einem Loch eines kleinen, an den Zylinder festgelöteten Kupferblocks eingeschmolzen ist.

Um die Zylinder um das Platinband anbringen zu können, mußte man einen etwa 3 mm breiten Streifen längs einer Erzeugenden aus der Zylinderwand

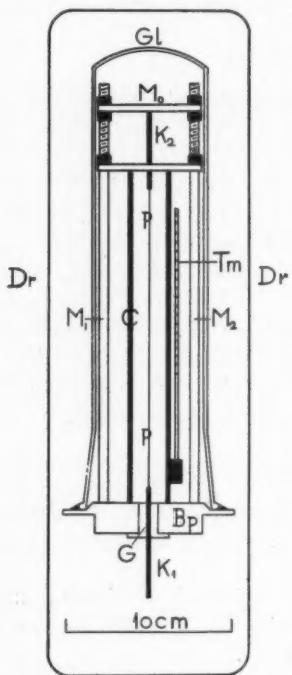


Fig. 1

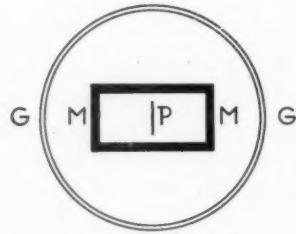


Fig. 2

heraussägen; außerdem war quer durch jeden Zylinder ein Loch von 10 mm gebohrt.

Durch dieses Loch beobachtete man den Rand des Platinbandes durch ein Mikroskop mit Okularmikrometer.

Die vier verwendeten Kupferzyinder waren alle 20 cm lang, die Dicke der Zylinderwand betrug etwa 0,25 cm, und die inneren Diameter waren bzw. 4,11 cm, 3,21 cm, 2,24 cm und 1,27 cm.

Das Platinband wurde aus einem größeren Blatt einer Platinfolie von Heraeus herausgeschnitten. Seine Konstanten waren: Länge = 15,63 cm, Breite *B* = 0,254 cm, die Dicke, durch Wägen

bestimmt,  $\tau = 0,000299$  cm, sein elektrischer Widerstand bei  $0^\circ R_0 = 2,487$  Ohm.

Der Temperaturkoeffizient des Widerstandes wurde für einen aus demselben Blatt geschnittenen Platinstreifen gemessen; dabei ergab sich  $R_t = R_0 \cdot (1 + \alpha t - \beta t^2)$ , wobei  $\alpha = 0,003085$ ,  $\beta = 65 \cdot 10^{-8}$  für das Intervall  $0^\circ$ – $300^\circ$  ist.

In der vorgenannten Abhandlung von Knudsen ist im einzelnen beschrieben, wie die Radiometerkraft durch magnetische Komensation gemessen wird; in Fig. 1 sind die Drahtwindungen, die das Magnetfeld erzeugen, durch *Dr* angedeutet.

Um die Radiometerkraft in dem Falle zu untersuchen, wo die Entfernung von der Kante des Bandes bis zur Wand des umgebenden Behälters kleiner als die Breite des Bandes ist, wurde ein 1 cm breites Platinband in den Apparat eingesetzt, das von einer senkrechten Messingröhre mit rechtwinkligem Querschnitt umgeben wurde. Sie wurde so aufgestellt, daß die längste Seite mit der Ebene des Bandes einen rechten Winkel bildete, wie in Fig. 2, die einen waagerechten Schnitt durch den Apparat zeigt, zu sehen ist.

*P* ist das Platinband, *M* die Messingröhre und *G* die Glashölze. Die Innenmaße der Röhre waren 3,2 cm und 1,48 cm, so daß die Entfernung von den Bandrändern bis zur Röhrenwand nur etwa 0,24 cm, also  $1/4 B$ , betrug.

Die Bandlänge war 14,83 cm. Das Band war einseitig mit Platinbeschichtung geschwärzt; seine Temperatur wurde durch den elektrischen Widerstand bestimmt. Die Temperatur der Messingröhre wurde an einem Quecksilberthermometer abgelesen, das in einem an der Röhre festgelöteten Kupferklotz angebracht war.

Die Messungen wurden im übrigen ganz so wie oben erwähnt ausgeführt.

Um die Abhängigkeit der Radiometerkraft von der Bandbreite *B* zu untersuchen, verwendete man die von Knudsen beschriebene Torsionswaage, die mit einem etwa  $100 \mu$  dicken Aufhängedraht aus Wolfram versehen wurde, dessen Drehmoment bei Schwingungsversuchen als

$$D = 109,2 \frac{\text{Dyn cm}}{\text{Radian}}$$

gemessen wurde.

Erst wurde die Radiometerkraft an einem Paar  $1/4$  cm breiten Platinbändern gemessen. Darauf ersetzte man diese durch ein Paar Bänder von  $1/2$  cm Breite, worauf die Radiometerkraft gemessen wurde. Schließlich führte man die Messungen mit einem Paar Bänder von 1 cm Breite aus.

Alle Dimensionen wurden für jedes Paar Bänder sorgfältig ausgemessen; den Ausschlagwinkel maß man durch Fernrohr und Skala.

Bezeichnet man die Radiometerkraft pro 1 cm der Bandlänge mit  $R_1$ , und ist der Ausschlag  $\alpha$  cm (auf Bogenmaß reduziert), so galt für die drei verschiedenen Bandpaare

$$R_1 = \alpha \cdot 0,00399 \text{ Dyn/cm für } B = 0,253 \text{ cm},$$

$$R_1 = \alpha \cdot 0,00410 \text{ Dyn/cm für } B = 0,502 \text{ cm},$$

$$R_1 = \alpha \cdot 0,00431 \text{ Dyn/cm für } B = 1,001 \text{ cm}.$$

$B$  = Mittelwert der Breite der beiden Bänder. Beispielsweise war das eine der  $1/2$  cm breiten Bänder 0,503 cm breit, das andere 0,499 cm.

Nachdem man die Bänder an der Torsionswaage festgelötet hatte, schwärzte man ihre eine Seite mit Platinschwarz; dieses Schwärzen geschah jedesmal in gleicher Weise, d. h. mit derselben Lösung von Platinchlorid, mit derselben Stromdichte und in gleicher Zeit, damit die schwarzen Oberflächen möglichst gleich wären.

Während der Messungen bestimmte man die Temperatur der Platinbänder durch den elektrischen Widerstand. An einem auf dem Glasdeckel angebrachten Thermometer las man die Temperatur des Behälters ab. Der Diameter des Behälters war etwa 23 cm.

Im folgenden bezeichnet  $T_1$  die Temperaturdifferenz  $T - T_0$ , wobei  $T$  die absolute Temperatur des Platinbandes ist,  $T_0$  die des Behälters, die etwa der Zimmertemperatur gleichkommt.

$R_1$  bezeichnet die Radiometerkraft pro Zentimeter der Bandlänge.

#### Ergebnisse der Messungen

Mit Hilfe des ersten Apparates (Fig. 1) wurde die Radiometerkraft in Wasserstoff für vier verschiedene Werte der Temperaturdifferenz für jeden Wert des Druckes  $p$  gemessen; die vier Temperaturdifferenzen waren  $T_1 =$  etwa 48, 85, 122 und 160°.

Den Druck  $p$  änderte man mit passenden Intervallen innerhalb des Gebietes etwa 5 bis etwa 8000 Dyn/cm<sup>2</sup>.

Eine solche Serie von Messungen wurde für jeden der vier Kupferzylinder ausgeführt, die sich um das 0,254 cm breite Platinband anbringen ließen; so wurden im ganzen 16 Radiometerkurven ausgemessen, wobei unter einer Radiometerkurve eine graphische Darstellung der Radiometerkraft als Funktion des Druckes bei konstanter Temperaturdifferenz zu verstehen ist. Da die Radiometerkraft pro Zentimeter  $R_1$  ungefähr  $T_1$  proportional ist, begnügen wir uns aus Platzrücksichten damit,  $R_1/T_1$  für den einen Wert

$T_1 = 122^\circ$  als Funktion von  $p$  für jeden der vier Zylinder darzustellen; vgl. Fig. 3.

Hieraus ersieht man, daß die Radiometerkraft bei abnehmendem Durchmesser des Zylinders schnell wächst; dies gilt vornehmlich bei

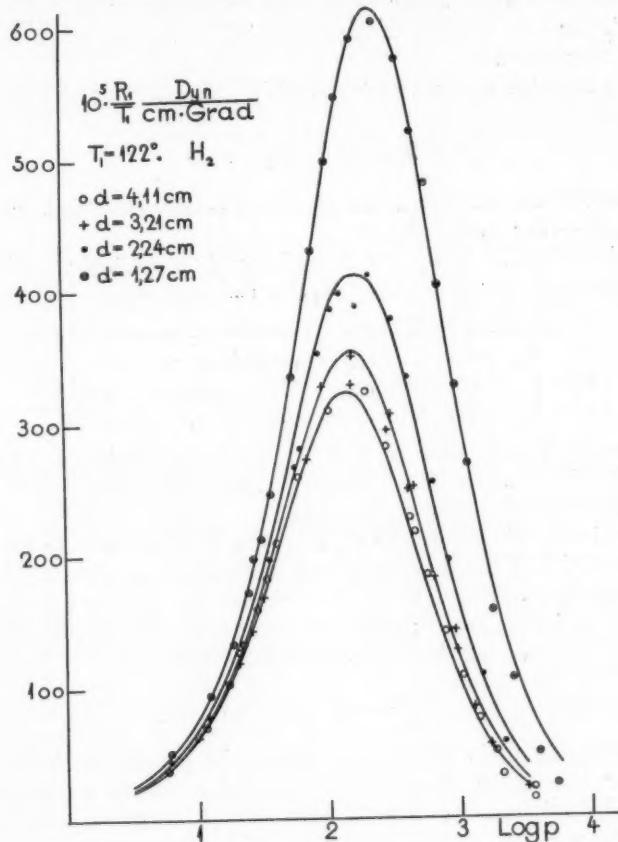


Fig. 3

hohen Drucken und in der Nähe des Maximum; bei niedrigen Drucken ist der Einfluß der Variation des Behälters viel geringer, ohne jedoch bei den niedrigsten, hier untersuchten Drucken ganz zu verschwinden.

Mit Hilfe der Radiometerkurven kann man den Druck  $p_m$  bestimmen, bei welchem die Radiometerkraft pro Zentimeter ihren größten Wert  $R_{1m}$  hat, indem man für jede Radiometerkurve die Linie zieht,

die die Mittelpunkte der waagerechten Entfernung zwischen dem ansteigenden und dem abfallenden Zweig der Kurve verbindet, und ihren Schnittpunkt mit der Radiometerkurve findet. Die Koordinaten dieses Punktes sind  $\log p_m$  und  $R_{1m}/T_1$ .

Die Ergebnisse dieser graphischen Bestimmung von  $p_m$  und  $R_{1m}/T_1$  für alle 16 Radiometerkurven sind in der folgenden Tab. 1 S. 650 angegeben.

Es hat sich ergeben, daß  $p_m$  und  $R_{1m}/T_1$  mit guter Annäherung durch

$$(1) \quad \frac{R_{1m}}{T_1} = k_1 + \frac{k_2}{d_1}, \quad p_m = k_3 + \frac{k_4}{d_1}$$

ausgedrückt werden kann, wobei  $d_1 = d - B =$  Durchmesser des Zylinders — der Bandbreite ist.

Die Größen  $k_1$ ,  $k_3$ ,  $k_2$  und  $k_4$  sind von  $d_1$  unabhängig, variieren aber etwas mit der Temperatur  $T_1$ , so daß man setzen muß

$$(2) \quad \begin{cases} k_1 = k_{10}(1 + \alpha_1 T_1) & k_{10} = 0,00285 \quad \alpha_1 = -0,0019 \\ k_2 = k_{20}(1 + \alpha_2 T_1) & k_{20} = 0,00404 \quad \alpha_2 = 0 \\ k_3 = k_{30}(1 + \alpha_3 T_1) & k_{30} = 97 \quad \alpha_3 = +0,0012 \\ k_4 = k_{40}(1 + \alpha_4 T_1) & k_{40} = 85 \quad \alpha_4 = +0,0031. \end{cases}$$

In der Tabelle über  $p_m$  und  $R_{1m}/T_1$  ist unter jedem Zahlenwert die Differenz  $\Delta$  zwischen diesem und dem aus obigen Formeln (1) und (2) berechneten Werte angegeben.

Inwieweit die Ausdrücke (1) über das hier untersuchte Gebiet hinaus Gültigkeit besitzen, kann man nicht im voraus wissen; jedoch wird eine Extrapolation zu  $\alpha_1 = 0$  offenbar ein sinnloses Ergebnis haben, nämlich  $R_{1m} = \infty$ ; setzt man dagegen  $d_1 = \infty$  d. h. betrachtet man ein schmales Band in einem sehr großen Behälter, so bekommt man

$$\frac{R_{1m}}{T_1} = k_1 \quad p_m = k_3.$$

Nimmt man an, daß  $R_{1m}/T_1$  und  $p_m$  im genannten Falle nur von der Bandbreite  $B$  sowie der Natur der Gasart, ausgedrückt durch die mittlere Weglänge  $\lambda$ , beim Druck 1 Dyn/cm<sup>2</sup> und der Differenz zwischen den Akkommodationskoeffizienten  $\alpha' - \alpha''$  sowie schließlich von der absoluten Temperatur  $T_0$  abhängig sind, so müssen  $k_1$  und  $k_3$  durch diese Größen ausgedrückt werden können.

Die einfachste Art, dies zu tun, ist folgende:

$$k_1 = c_1 \cdot \frac{\lambda_1}{T_0}, \quad k_3 = c_3 \cdot \frac{\lambda_1}{B},$$

woraus folgt

$$k_2 = c_2 \cdot \frac{\lambda_1 B}{T_0}, \quad k_4 = c_4 \lambda_1.$$

Man sieht, daß die  $k$ -Größen die richtigen Dimensionen besitzen;  $k_1$  soll ja z. B. dieselbe Dimension wie  $R_{1m}/T_1$  d. h.  $\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge} \cdot \text{Temperatur}}$  haben.

Die  $c$ -Größen sind reine Zahlen, die von den Akkommodationskoeffizienten, die ja dimensionslos sind, abhängen.

Diese Betrachtung bringt u. a. folgendes Ergebnis: In einem sehr großen Behälter soll die maximale Radiometerkraft  $R_{1m}/T_1 \lambda_1$  proportional sein und unabhängig von  $B$ , und der Druck  $p_m$ , bei welchem  $R_{1m}/T_1$  auftritt, ist umgekehrt proportional  $B$  und proportional  $\lambda_1$ .

Vergleicht man  $\frac{R_{1m}}{T_1 \cdot \lambda_1}$  für verschiedene Gasarten ist zu bedenken, daß mit den Akkommodationskoeffizienten zu rechnen ist, da  $c_1$  (und  $c_2$ )  $a' - a''$  proportional sein müssen.

Es hat sich gezeigt, daß jede der 16 Radiometerkurven mit guter Annäherung sich durch eine Formel darstellen läßt

$$(3) \quad \frac{R_1}{T_1} = \frac{\frac{1}{4} (a' - a'') \frac{B}{T_0} \cdot p}{1 + (b p) + (b p)^2 + \left(\frac{1}{3} b \cdot p\right)^3},$$

die für niedrige Drucke mit Knudsens Formel für die Radiometerkraft<sup>1)</sup> übereinstimmt.

Durch Differentiation in bezug auf  $p$ , findet man aus (3)

$$(4) \quad a' - a'' = 11,73 \cdot \frac{R_{1m} \cdot T^0}{T_1 \cdot p_m \cdot B}, \quad b = \frac{0 \cdot 9660}{p_m}.$$

Da die Konstanten  $a' - a''$  und  $b$  hier durch  $R_{1m}/T_1$  und  $p_m$  ausgedrückt sind, erhält man durch Einführung der Ausdrücke (1) und (2) dieselben Konstanten durch die Größen  $k$  und  $d$  ausgedrückt, und dadurch werden durch die Formel (3) alle Ergebnisse der Messungen durch diese Größen dargestellt.

Die ganz aufgezogene Kurve in Fig. 3 ist in dieser Weise berechnet, und in Tab. 1 sind die Werte der Konstanten  $a' - a''$  angeführt. Es fällt auf, daß sich diese Werte so stark abhängig von der Größe des umgebenden Zylinders erweisen, was von der Definition des Akkommodationskoeffizienten aus unverständlich ist, es sei denn, daß man annehme, daß die Akkommodation an der Wand des Behälters unvollständig ist. Doch kann auch diese Annahme kaum die Abhängigkeit erklären. Bei dem engsten Zylinder  $d = 1,27$  cm war die innere Oberfläche  $\frac{\pi \cdot 1,27}{2 \cdot 0,254} = c$  8 mal größer als die Ober-

1) M. Knudsen, a. a. O. S. 132.

Tabelle 1

<i>d</i>	$T_1 =$	48°	85°	122°	160°
4,11 cm	$\frac{p_m}{A}$	129	135	138	148
	$+ 1$	+ 1	+ 1	- 3	0
	$10^5 \frac{R_{1m}}{T_1}$	375	342	321	309
	$\frac{A}{a' - a''}$	+ 11 0,387	- 2 0,350	- 2 0,312	+ 6 0,282
3,21 cm	$\frac{p_m}{A}$	135	144	155	159
	$0$	+ 1	+ 4	+ 1	+ 1
	$10^5 \frac{R_{1m}}{T_1}$	382	361	342	328
	$\frac{A}{a' - a''}$	- 14 0,400	- 16 0,359	- 14 0,323	- 7 0,292
2,24 cm	$\frac{p_m}{A}$	151	166	170	182
	$0$	+ 5	0	+ 3	- 6
	$10^5 \frac{R_{1m}}{T_1}$	452	432	408	394
	$\frac{A}{a' - a''}$	- 10 0,417	- 10 0,375	- 13 0,339	- 7 0,308
1,27 cm	$\frac{p_m}{A}$	195	214	229	234
	$- 3$	+ 2	- 3	- 6	- 6
	$10^5 \frac{R_{1m}}{T_1}$	643	628	606	589
	$\frac{A}{a' - a''}$	- 11 0,453	- 8 0,411	+ 10 0,375	- 5 0,343

fläche des Platinbandes. Gesetzt, daß der Akkommodationskoeffizient des Zylinders  $\frac{1}{2}$  ist, und daß ein Molekül durchschnittlich 8 mal die Zylinderfläche trifft, während es das Platinband einmal trifft, und daß Knudsens Formel<sup>1)</sup>

$$\frac{n'}{n''} = \frac{\log(1 - a_e')}{\log(1 - a_e'')}$$

sich anwenden läßt, so erhält man

$$8 = \frac{\log(1 - a_e')}{\log \frac{1}{2}}$$

also

$$\log(1 - a_e') = 8 \cdot \log \frac{1}{2}; \quad 1 - a_e' = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 0,004.$$

Das besagt, daß die das Platinband treffenden Moleküle sich mit dem Zylinder so gut wie im Temperaturgleichgewicht befinden.

Zur näheren experimentellen Untersuchung der Abhängigkeit wurde für jeden der 4 Zylinder die Radiometerkraft bei einer Reihe

1) M. Knudsen, a. a. O. S. 133, vgl. auch S. 146—148.

sehr niedriger Drucke bei der Temperaturdifferenz  $122^\circ$  gemessen. Da sich das Meßverfahren aber nicht für sehr geringe Radiometerkräfte eignet, wie sie bei den niedrigen Drucken auftreten, können diese Meßergebnisse, die in Fig. 4 mit dem Druck  $p$  als Abszisse

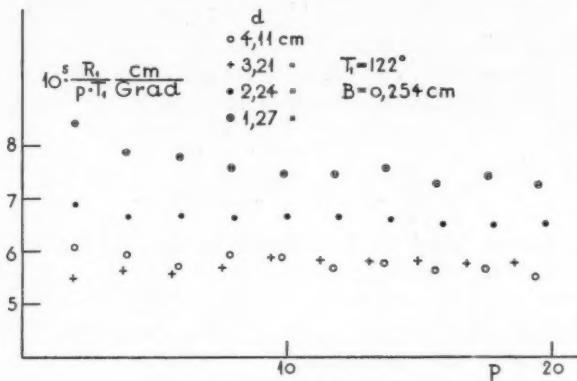


Fig. 4

und  $10^5 \frac{R_1}{p \cdot T_1}$  als Ordinate graphisch dargestellt sind, nicht als unbedingt sicher angesehen werden. Es scheint aber, daß die Radiometerkraft auch bei den niedrigsten Drucken wächst, wenn  $d$  abnimmt.

Rechnet man mit den Mittelwerten von  $R_1/p T_1$  für die 10 niedrigsten Drucke, und berechnet man  $a' - a''$  aus der Formel

$$a' - a'' = \frac{R_1}{p \cdot T_1} \cdot 4 \cdot \frac{T_0}{B},$$

erhält man aus diesen Messungen folgende Werte:

$a' - a''$ für $d$	
0,27	4,11 cm
0,27	3,21 "
0,31	2,24 "
0,35	1,27 "

Westphal und andere Verfasser haben gefunden, daß die Radiometerkurve in log-linearer Darstellung um die Ordinate durch  $p_m$  ungefähr symmetrisch ist; in den hier untersuchten Fällen hat sich jedoch eine geringe, wohl aber unzweifelhafte Abweichung von der Symmetrie ergeben, die in allen Fällen in der Richtung geht, daß  $R_1/T_1$  bei hohen Drucken stärker als  $1/p$  abnimmt. Dies hat das Glied dritten Grades im Nenner der Formel (3) notwendig gemacht.

V  
2  
2  
1  
9  
3  
5  
XUM

Betrachtet man wieder den Fall  $d_1 = \infty$ , also ein schmales Band in einem großen Behälter, so ist  $p_m = k_3 = c_3 \cdot \frac{\lambda_1}{B}$ ; setzt man dies in den Ausdruck (4) für  $b$  ein, erhält man

$$b = \frac{0,9660}{c_3} \cdot \frac{B}{\lambda_1} = c \cdot \frac{B}{\lambda_1},$$

wobei  $c$  eine reine Zahl ist.

Die Radiometerkraft pro Zentimeter an einem schmalen Band in einem großen Behälter müßte sich also durch

$$(5) \quad \frac{R_1}{T_1} = \frac{\frac{1}{4} (a' - a'') \cdot \frac{B}{T_0} \cdot p}{1 + c \frac{B}{\lambda_1} \cdot p + \left( c \cdot \frac{B}{\lambda_1} \cdot p \right)^2 + \left( \frac{1}{3} c \cdot \frac{B}{\lambda_1} \cdot p \right)^3}$$

darstellen lassen, wobei die Konstante  $c$  in erster Annäherung von  $B$  und  $\lambda_1$  und  $p$  unabhängig sein sollte.

Mittels des 1 cm breiten Bandes in der rechtwinkligen Röhre wurde die Radiometerkraft in Wasserstoff bei den Temperaturdifferenzen  $T_1 = 40, 80$  und  $120^\circ$  gemessen.

Wegen der großen, von dem heißen Band abgegebenen Wärmemengen ließen sich einigermaßen stationäre Wärmeleitungszustände meistens nicht erzielen, besonders bei hohen Drucken, was an einer ständigen Temperaturerhöhung der Messingröhre erkennbar war. Daher war die Unsicherheit in der Bestimmung von  $T_1$  ebenso wie von  $R_1$  ziemlich groß. Die Messungen bei den niedrigeren Drucken waren wesentlich genauer.

Dies ersieht man auch aus Fig. 5, wo  $R_1/T_1$  für  $T_1 = 80^\circ$  graphisch dargestellt ist.

Der Ordinatenmaßstab in Fig. 5 ist 5 mal kleiner als in Fig. 6. Die Radiometerkraft ist also etwa 5 mal größer.

Die Maximalwerte sind  $\frac{R_{1m}}{T_1} = 147 \cdot 10^{-4} \frac{D_{y\text{m}}}{\text{cm Grad}} p_m = 166 \frac{D_{y\text{m}}}{\text{cm}^2}$ .

Die Ergebnisse lassen sich in diesem Falle durch die symmetrische Radiometerkurve darstellen, die man aus (3) durch Auslassen des Gliedes dritten Grades im Nenner erhält.

Die Konstanten werden in diesem Falle durch

$$a' - a'' = 12 \frac{R_{1m} \cdot T_0}{T_1 \cdot p_m \cdot B} \quad b = \frac{1}{p_m}$$

bestimmt.

Dies ergibt

$$a' - a'' = 0,314 \quad b = \frac{1}{166}.$$

Die ganz aufgezogene Kurve in Fig. 5 ist mittels dieser Konstanten berechnet.

In derselben Figur ist außerdem zum Vergleich (punktiert) die Radiometerkurve für das breiteste Band im großen Behälter gezeichnet nach Messungen, die im folgenden beschrieben sind.

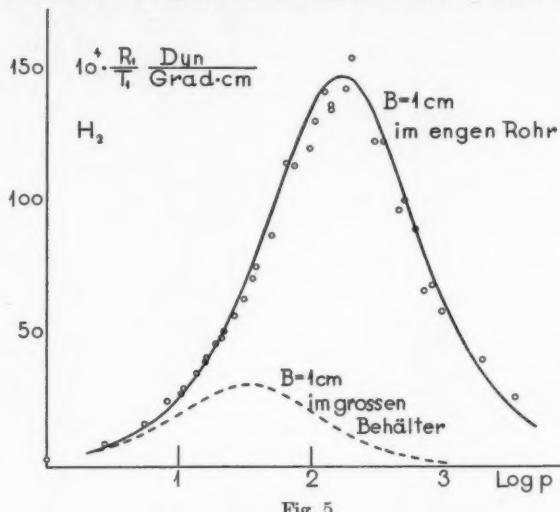


Fig. 5

Zur Probe der vorhergehenden Betrachtungen und der Formel (5) können die mit dem anderen Apparat, der Torsionswaage, gefundenen Meßergebnisse verwendet werden.

Mit dessen Hilfe wurde die Radiometerkraft in Wasserstoff und trockner atmosphärischer Luft für verschiedene Werte von der Temperaturdifferenz  $T_1$  gemessen; man wählte dazu eine solche, die einen passenden Ausschlag geben würde. Da  $R_1/T_1$  nur langsam mit  $T_1$  variiert, sind die Meßergebnisse, die in Figg. 6 und 7 graphisch dargestellt wurden, nur für  $T_1 = 40^\circ$  dargestellt.

Die Genauigkeit der Messung ist bei hohen Drucken und für die breiten Bänder am geringsten. Das liegt an der recht großen Wärmeabgabe, die zur Folge hat, daß man nicht leicht einen einigermaßen stationären Zustand erzielen kann, was eine Unsicherheit in der Bestimmung von  $T_1$  und  $R_1$  ergibt.

Die Messungen in Luft sind wesentlich ungenauer als diejenigen in Wasserstoff, da die Radiometerkräfte in Luft sehr klein sind, etwa 10mal kleiner als in Wasserstoff; in Fig. 6 ist der Maßstab für  $R_1/T_1$  10mal kleiner als in Fig. 7.

Man sieht, daß die Radiometerkräfte bei niedrigen Drucken mit  $B$  wachsen, was mit Knudsen und anderen Messungen übereinstimmt.

Bei hohen Drucken nimmt  $R_1/T_1$  bei wachsendem  $B$  stark ab und ist innerhalb eines gewissen Druckgebietes annähernd umgekehrt proportional  $B$ .

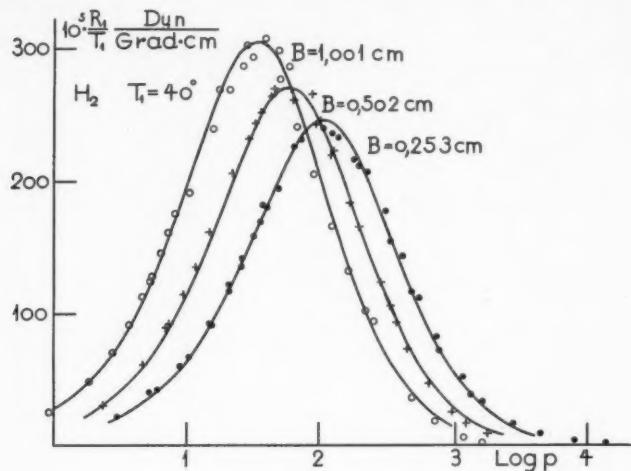


Fig. 6

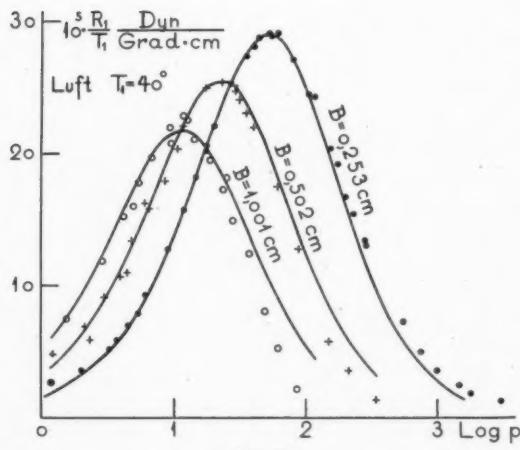


Fig. 7

Die Radiometerkraft an einem Band ist also keine Randwirkung bei hohen Drucken. Der Maximalwert für  $R_1/T_1$  ist nur wenig von  $B$  abhängig; wächst  $B$  von 0,25 cm bis zu 1 cm, und wird somit

4 mal größer, wächst  $\frac{R_{1m}}{T_1 \text{ Wasserstoff}}$  im Verhältnis  $\frac{304}{247} = 1,24$ , und

$\frac{R_{1m}}{T_1 \text{ Luft}}$  nimmt im Verhältnis  $\frac{22}{29} = 0,76$  ab. Der Druck  $p_m$ , bei welchem  $R_{1m}/T_1$  auftritt, ist etwa umgekehrt proportional  $B$ , wie aus der folgenden Tab. 2 über die graphisch bestimmten Werte für  $R_{1m}/T_1$  und  $p_m$  hervorgeht.

Tabelle 2

$B$	$10^5 \frac{R_{1m}}{T_1}$	$p_m$	$a' - a''$	$c$
Wasserstoff	0,253	247	107	0,401
	0,502	272	59	0,368
	1,001	304	33	0,329
Luft	0,253	29,2	51	0,456
	0,502	25,8	22,4	0,52
	1,001	21,9	11,5	0,51

Es wurde versucht, die Meßergebnisse durch die Formel (5) darzustellen; die Konstanten  $a' - a''$  und  $c$  berechnete man aus

$$a' - a'' = 11,73 \frac{R_{1m} \cdot T_0}{T_1 \cdot p_m \cdot B}, \quad c = 0,9660 \cdot \frac{\lambda_1}{B \cdot p_m},$$

wobei  $\lambda_1 = 11,23$  cm in Wasserstoff und  $\lambda_1 = 6,08$  cm in Luft gerechnet wurde.

Wie man sieht, variieren die Werte für  $c$  etwas sowohl mit  $B$  wie mit  $\lambda_1$ . Diese Variation liegt wohl zum Teil daran, daß die Voraussetzung von der unendlichen Größe des Behälters nicht erfüllt ist. Daß aber  $c$  mit wachsendem  $B$  im Wasserstoff abnimmt, dagegen in Luft wächst, läßt sich kaum ausschließlich durch die geometrischen Verhältnisse erklären.

Die ganz aufgezogenen Kurven in den Figg. 6 und 7 sind aus der Formel (5) mit den obengenannten Werten für die Konstanten berechnet.  $T_0 = 293^\circ$  gesetzt.

Wie man sieht, lassen sich die Messungen in Wasserstoff mit guter Annäherung darstellen. Dagegen stimmen die Kurven nicht so gut zu den Messungen in Luft, besonders bei hohen Drucken. Wegen der ziemlich großen Unsicherheit in diesen Messungen lassen sich aber kaum weitere Schlüsse hieraus ziehen. Es ist möglich, daß senkrechte, durch die Erwärmung der Luft erzeugte Strömungen den eigentümlichen Verlauf der Meßergebnisse auf diesem Gebiet bewirken.

## Zusammenfassende Bemerkungen

Bezeichnet  $R_1$  die Radiometerkraft an 1 cm der Länge eines Platinbandes, wenn die Temperatur des Bandes  $T_1$ ° höher ist als die des umgebenden Behälters, so wurde folgendes nachgewiesen:

$R_1$  ist ungefähr proportional  $T_1$ .

Die Größe  $R_1/T_1$  ist bei niedrigen Drucken der Bandbreite  $B$  proportional.

Der Maximalwert  $R_{1m}/T_1$  ändert sich nur wenig mit  $B$ , wenn der umgebende Behälter groß ist.

Für denselben Wert für  $B$  wächst  $R_{1m}/T_1$  bei verkleinertem Behälter.

Der Druck  $p_m$ , bei welchem  $R_{1m}/T_1$  auftritt, ist in einem großen Behälter etwa umgekehrt proportional  $B$ .

Bei konstantem  $B$  wächst  $p_m$ , wenn man den Behälter kleiner macht.

Bei hohen Drucken in einem großen Behälter nimmt  $R_1/T_1$  mit wachsendem  $B$  stark ab; es kann also nicht von Randwirkung die Rede sein.

Es wurde versucht, die Ergebnisse in Formeln auszudrücken.

Der Verfasser möchte Herrn Prof. Dr. Martin Knudsen seinen Dank für die guten Arbeitsverhältnisse aussprechen, sowie für sein stetes Interesse an der Arbeit. Dieser Dank gilt auch der Verwaltung von Emil Herbogs Legat für ökonomische Stütze.

Kopenhagen, Polytechnische Laereanstalt, Fysisk Samling.

(Eingegangen 14. März 1935)

**Über die Berechnung der Bandenkonstanten  
für die zweite positive Stickstoffgruppe**

**Von Arnold Guntsch**

(Mit 2 Figuren)

In einer neulich in dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung<sup>1)</sup> von Büttenbender und Herzberg haben diese Verff. eine interessante Erörterung dieses Spektrums gegeben. Bei einem Vergleich zwischen den von Büttenbender und Herzberg erhaltenen und denselben von mir<sup>2)</sup> früher veröffentlichten Konstanten ist ein deutlicher Unterschied zu finden, wie Büttenbender und Herzberg auch in ihrer Abhandlung angeben. Berechnungen über die Bandenkonstanten sind außerdem auch von Coster, Brons und van der Ziel<sup>3)</sup> ausgeführt, deren Werte mit den von mir erhaltenen gut übereinstimmen. Dieser Unterschied, vor allem die B-Werte betreffend, ist um so bemerkenswerter, als er schon in der zweiten Stelle vorhanden ist, während Büttenbender und Herzberg die B-Werte mit vier Stellen angeben. Dies hat mich veranlaßt, eine Neuberechnung der Konstanten vorzunehmen.

Um möglichst sichere Werte der Konstanten zu erhalten, habe ich die von Büttenbender und Herzberg angegebenen Mittelwerte der Kombinationsdifferenzen verwendet, die mit  $A_2 F(J)$  bezeichnet werden. Indem von der Termdarstellung

$$F(J) = B \left( J + \frac{1}{2} \right)^2 + D \left( J + \frac{1}{2} \right)^4 + F \left( J + \frac{1}{2} \right)^6 + \Phi(J)$$

ausgegangen wird, erhält man [vgl. Bengtsson und Olsson<sup>4)</sup>]

$$\frac{A_2 F(J)}{J + \frac{1}{2}} = 4B + 8D \left( J + \frac{1}{2} \right)^2 + 12F \left( J + \frac{1}{2} \right)^4 + \frac{A_2 \Phi(J)}{J + \frac{1}{2}}$$

$\frac{A_2 F(J)}{J + \frac{1}{2}}$  wird graphisch als eine Funktion von  $\left( J + \frac{1}{2} \right)^2$  aufgetragen.

1) G. Büttenbender u. G. Herzberg, Ann. d. Phys. [5] 21. S. 577. 1935.  
2) A. Guntsch, Ztschr. f. Phys. 86. S. 262. 1933.

3) D. Coster, F. Brons u. A. van der Ziel, Ztschr. f. Phys. 84. S. 304.

1933.

4) E. Bengtsson u. E. Olsson, Ztschr. f. Phys. 72. S. 163. 1931.

Man findet, daß man durch die in dieser Weise erhaltenen Punkte eine Gerade ziehen kann, deren Schnitt mit der Abszisse  $4B$  und deren Neigung  $8D$  gibt. Die für höhere  $J$ -Werte eintretende Abweichung von der Geraden gibt

an, daß der  $F$ -Term sich bemerkbar macht<sup>1)</sup>. Die Verhältnisse werden durch die ausgezogene Linie in Fig. 1 dargestellt.

In dieser Weise wurden die in meiner Untersuchung über die zweite positive Stickstoffgruppe angegebenen  $B$ -Werte berechnet. Dagegen sind die dort angegebenen  $D$ -Werte keineswegs genau berechnet, sondern nur durch eine sehr grobe Schätzung ermittelt, um die etwaige Größenordnung zu erhalten, was den von Büttendorfer und Herzberg bemerkten Unterschied zwischen den von diesen Verff. und den von mir berechneten  $D$ -Werten erklärt. Mit Hilfe der genaueren Werte der Kombinationsdifferenzen habe ich jetzt genauere  $B$ - und  $D$ -Werte ermittelt. Die von Coster, Brons und van der Ziel, von Büttendorfer und Herzberg und vom Verf. berechneten  $B$ -Werte sind zum Vergleich in Tab. 1 aufgeführt. Die in oben angegebener Weise berechneten  $D$ -Werte sind in Tab. 2 wiederzufinden.

Fig. 1. Verlauf der mit  $J + \frac{1}{2}$  dividierten Kombinationsdifferenzen.  
--- Büttendorfer u. Herzberg unter Vernachlässigung des  $\epsilon$ -Termes  
— Verfasser

Bei einem Vergleich zwischen den von Büttendorfer und Herzberg und den von mir aus demselben Ziffermaterial erhaltenen Konstanten findet man, daß ein deutlicher Unterschied vorhanden ist. Dieser Unterschied ist in Fig. 1, den Verlauf von  $\frac{A_2 F(J)}{J + \frac{1}{2}}$  für

1) Die Bedeutung des Termes  $\Phi(J)$  wird später besprochen.

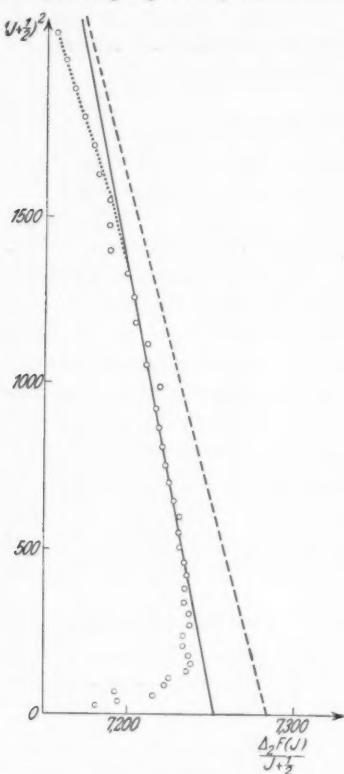


Tabelle 1

B-Werte

v'	Coster, Brons und van der Ziel	Büttenbender und Herzberg	Guntsch	
			aus eigenen Werten	aus den Mittelwerten
0	1,816	1,8213	1,813	1,813 <sub>3</sub>
1	1,792	1,7996	1,789	1,791 <sub>0</sub>
2	1,768	1,7751	1,764	1,766
3	1,741	1,7472	1,738	1,738
4	1,706	1,7092	1,701	1,701
v''				
0	1,623	1,6340	1,625	1,625 <sub>0</sub>
1	1,611	1,6158	1,610	1,608 <sub>3</sub>
2	1,594	1,5992	1,589	1,591
3	1,576	1,5804	1,571	1,571
4	1,555	1,5614	1,551	1,553
5	(1,537)	1,5434	1,531	1,534
6	(1,514)	1,5235	1,514	1,515
7	—	1,5042	1,494	1,496
8	—	1,4931	1,482	1,481
12	—	1,4091	—	1,405

Tabelle 2

D-Werte

v	— D' · 10 <sup>5</sup>	— D'' · 10 <sup>5</sup>
0	0,48	0,43
1	0,48	0,45
2	0,56	0,47
3	0,65	0,48
4	1,12	0,50
5	—	0,52
6	—	0,54
7	—	0,5
8	—	Unsicher
12	—	0,5

den Endzustand 0 darstellend, zu sehen. In der Figur entspricht die gestrichelte Linie den von Büttenbender und Herzberg, die ausgezogene Linie den von mir berechneten Werten. Die von Büttenbender und Herzberg verwendete Termdarstellung ist:

$$F(J) = B \left( J + \frac{1}{2} \right)^2 + D \left( J + \frac{1}{2} \right)^4 + \epsilon \left( J + \frac{1}{2} \right).$$

Dem Unterschied zwischen den wirklich beobachteten Werten und der Geraden, die den von Büttenbender und Herzberg berechneten Werten entspricht, wird innerhalb des ganzen Beobach-

tungsgebietes von dem letzten Term  $\epsilon \left( J + \frac{1}{2} \right)$  entsprochen. Dieser Term dürfte so aufzufassen sein, daß dadurch der Verlauf von teils einer Spinentkopplung, teils einer  $l$ -Entkopplung, wenn eine solche meßbarer Größe vorhanden ist, dargestellt wird. Aus dem unregelmäßigen Verlauf für niedrige  $J$ -Werte, der kaum als Beobachtungsfehler erklärt werden kann, dürfte anzunehmen sein, daß eine Mischung dieser Fälle, und vielleicht auch andere unübersehbare Verhältnisse vorhanden sind. Die verschiedenen Ergebnisse bei der Berechnung der Bandenkonstanten, wie diese von Büttendorfer und Herzberg und von mir erhalten sind, beruhen offenbar auf dem Ausdruck, der für  $\Phi(J)$  gewählt wird. Da die Theorie über die Darstellung dieses Termes noch als unklar betrachtet werden muß, habe ich mich damit begnügt, in Fig. 2 den graphischen Verlauf von  $A_2 \Phi(J)$ , wie sich dieser nach der von mir verwendeten Berechnungsweise zeigt, anzugeben.

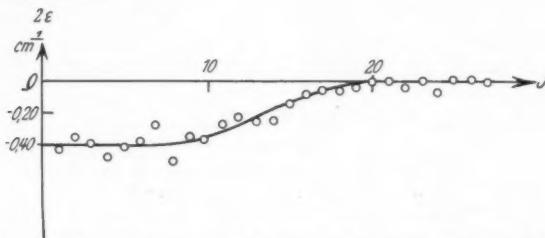


Fig. 2. Verlauf der Differenz  $A_2 F(J) - 4B(J + \frac{1}{2}) - 8D(J + \frac{1}{2})^3$  für  $v' = 0$

In dieser Figur ist als Ordinate

$$A_2 F(J) - 4B \left( J + \frac{1}{2} \right) - 8D \left( J + \frac{1}{2} \right)^3$$

und als Abszisse  $J$  abgesetzt. Aus der Figur ist zu ersehen, daß hier anfangs eine Termdarstellung mit einem beigefügten Gliede ersten Grades in  $J$  genügt, indem die Kurve parallel der Abszisse verläuft, wobei der Wert von  $\epsilon$  etwa mit  $2\epsilon = -0,40$  gegeben wird. Im weiteren Gange aber deckt diese Termdarstellung den Verlauf nicht länger. Die Differenz nimmt ab, d. h. andere Terme machen sich geltend. Schließlich wird bei etwa  $J = 20$  die Differenz innerhalb der Fehlergrenze Null, was sich mit Berücksichtigung des  $F$ -Termes, für die höheren  $J$ -Werte erstreckt. Dies wäre dann so zu deuten, daß bei einer Termdarstellung mit meinen Bandenkonstanten ein  $\Phi$ -Term nicht länger notwendig ist.

In diesem Zusammenhang entsteht auch die Frage, inwiefern es erlaubt sein kann, in der Termdarstellung von dem  $F$ -Terme

abzusehen. Aus der Fig. 1 geht hervor, daß etwa bei  $J = 37$  eine Abweichung von der Geraden, d. h. daß ein  $F$ -Term sich bemerkbar macht. Diese Abweichung zeigt eine deutliche Krümmung, so daß durch die mit dieser Abweichung behafteten Punkte eine Gerade nicht gelegt werden kann, und zeigt damit, daß der  $D$ -Wert richtig sein dürfte. Die Größenordnung des vorhandenen  $F$ -Wertes ist etwa  $-10^{-10}$ <sup>1)</sup>. Nach der Fig. 1 in der Abhandlung von Büttenbender und Herzberg zu beurteilen sind die Werte bis zu  $J = 45$  für die Berechnung ihrer Konstanten mitgenommen. Wenn ein  $F$ -Term berücksichtigt werden soll, bedeutet das aber, daß für diese Werte eine Abweichung von der Geraden vorhanden sein sollte. Dies ist bei den vorhandenen hohen  $J$ -Werten um so wichtiger, als ja die höheren  $J$ -Werte für den Verlauf der Geraden von größerer Bedeutung sind als die niedrigeren  $J$ -Werte, weil der  $D$ -Term mit der dritten und der  $F$ -Term mit der fünften Potenz steigt.

Der Vollständigkeit wegen gebe ich noch hier an, daß graphisch berechnet wurde

$$\begin{aligned} \text{für den Anfangszustand } B_e &= 1,823 \\ D_e &= -0,48 \cdot 10^{-5} \\ \text{für den Endzustand } B_e &= 1,635 \\ D_e &= -0,42 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Als Zusammenfassung möchte ich zuletzt hervorheben, daß die von Büttenbender und Herzberg verwendete Termdarstellung, und das muß anerkannt werden, an und für sich den Verlauf der Kombinationsdifferenzen sehr gut darstellt. Aus dem oben Gesagten dürfte jedoch hervorgehen, daß die von diesen Verff. gewählte Termdarstellung nicht als eine unbedingt aus den Beobachtungen entstammene Form zu betrachten ist. Die theoretische Darstellung von  $\Phi(J)$  ist, wie oben gesagt, noch immer unklar, und in Übereinstimmung damit sind die von mir ausgeführten Berechnungen der Bandenkonstanten gemacht, ohne zu versuchen, für  $\Phi(J)$  irgendeine Form anzugeben.

1) Eine genauere Übereinstimmung zwischen den hier berechneten Konstanten und den theoretisch zu erhaltenden (z. B.  $F_e = \frac{2 D_e^3}{B_e} - \frac{\alpha \omega_e D_e^5}{6 B_e^3}$ ) ist kaum zu erwarten, da die hier erhaltenen Konstanten die sogenannten effektiven Werte ( $B^*$ ,  $D^*$ ,  $F^*$ ) entsprechen, wo sich andere Einflüsse geltend machen.

Um eine allseitige Darstellung der Konstantenberechnung zu erhalten, habe ich meine Arbeit Herrn Dr. G. Herzberg zugestellt. Dr. Herzberg wünscht folgendes mitzuteilen:

Zu der vorliegenden Arbeit, die Herr Guntzsch mir liebenswürdigsterweise im Manuskript sandte, möchte ich folgendes bemerken:

Ich stimme mit Herrn Guntzsch darin vollkommen überein, daß wegen des Gliedes  $\Phi(J)$  die von uns angegebenen Rotationskonstanten  $B$  und  $D$  nur „effektive“  $B$ - und  $D$ -Werte sind, da  $\Phi(J)$  noch ein in  $J$  quadratisches bzw. biquadratisches Glied enthalten kann. Es ist klar, daß man je nach der Annahme über die Form von  $\Phi(J)$  zu etwas verschiedenen effektiven  $B$ - und  $D$ -Werten gelangen muß. Herr Büttnerbender und ich konnten den Verlauf der  $\Delta_2 F$ -Werte im ganzen beobachteten Bereich durch Einführung eines Gliedes  $\epsilon \left( J + \frac{1}{2} \right)$  in völliger Übereinstimmung mit der Beobachtung darstellen.

Wir haben damit also  $\Phi(J) = x + \epsilon \left( J + \frac{1}{2} \right) + \delta \left( J + \frac{1}{2} \right)^2 + \eta \left( J + \frac{1}{2} \right)^4$  angenommen, wo  $\delta$  und  $\eta$  in  $B$  bzw.  $D$  enthalten sind und  $x$  infolge der Differenzbildung bei den Kombinationsdifferenzen hervorsteht. Herr Guntzsch zieht es vor, über die genauere Form von  $\Phi(J)$  überhaupt keine Annahme zu machen außer, daß er der Meinung ist, daß  $\Phi(J)$  für große  $J$  gegen Null geht. Dadurch kann er dann allerdings nur die beobachteten  $\Delta_2 F$ -Werte mit größeren  $J$  gut darstellen. Es scheint mir aber, daß man nach seinem Verfahren nicht zu einem eindeutigen effektiven  $B$ - und  $D$ -Wert kommt, sondern je nach dem, bis zu welcher Stelle man den Einfluß von  $\Phi(J)$  annimmt, einen verschiedenen Wert erhält. Die Frage, ob die von Guntzsch berechneten effektiven  $B$ -Werte den wahren  $B$ -Werten näher kommen als unsere, muß meines Erachtens offen bleiben, solange es keine theoretischen Formeln für das  $\Phi(J)$  eines  $^3\Pi_1$ -Zustandes gibt.

Stockholm, Phys. Institut der Universität, Februar 1935.

(Eingegangen 16. Februar 1935)

**Geschwindigkeit elastischer Wellen  
im Quecksilberkristall und die daraus berechnete  
charakteristische Temperatur<sup>1)</sup>**

**Von E. Grüneisen und H. Hoyer**

(Mit 5 Figuren)

**Inhalt:** Aus den für  $-190^{\circ}\text{C}$  gültigen elastischen Konstanten des Quecksilberkristalls wird die Geschwindigkeit elastischer Wellen als Funktion der kristallographischen Richtung berechnet. Daraus ergibt sich für das  $T^3$ -Gebiet der spezifischen Wärme eine Debyesche charakteristische Temperatur  $\Theta = 68_{\text{gg}}$ .

**1. Vergleich der aus der Atomwärme und aus elastischen Konstanten berechneten  $\Theta$  einatomiger Kristalle**

Für die hexagonalen Kristalle Zn und Cd ergeben<sup>2)</sup> die nach Debye und Born-Kármán aus den Geschwindigkeiten elastischer Wellen berechneten charakteristischen Temperaturen  $\Theta_{\text{elast.}}$  erheblich zu kleine spezifische Wärmen, und zwar nicht nur in höherer Temperatur, sondern auch im  $T^3$ -Gebiet<sup>3)</sup>. Die  $\Theta_{\text{elast.}}$  sind also zu groß (vgl. Tab. 1). Der früher<sup>2)</sup> vermutete Grund für diese Unstimmigkeit, die Dispersion kurzer elastischer Wellen, dürfte für höhere Temperaturen ausreichen, ist aber für das  $T^3$ -Gebiet nicht stichhaltig<sup>4)</sup>. Denn für die in der Nähe des absoluten Nullpunktes noch wirksamen niederen Frequenzen sollte der Einfluß der Gitterstruktur verschwinden.

Inzwischen<sup>5)</sup> ist auch für einige reguläre Metalle geprüft worden, ob die aus den elastischen Konstanten des Einkristalls berechneten  $\Theta_{\text{elast.}}$  mit den im  $T^3$ -Gebiet aus  $C_v$  ermittelten  $\Theta_D$  übereinstimmen. Das Ergebnis zeigt Tab. 1. Zu ihr ist folgendes zu bemerken: Die Zahlen der Spalte 2 sind dadurch gewonnen, daß zunächst nach

1) Der wesentliche Inhalt dieser Mitteilung wurde auf der Gauvereinstagung in Frankfurt a. M. am 26. Januar 1935 vorgetragen.

2) E. Grüneisen u. E. Goens, Ztschr. f. Phys. **26**. S. 250. 1924; vgl. auch K. Honnefelder, Ztschr. f. phys. Chem. B **21**. S. 53. 1933.

3) Dies hat sich erst durch spätere Messungen herausgestellt.

4) A. Eucken, Handb. d. Exp.-Phys. 8,1. S. 254. 1929; vgl. auch M. Blackman, Proc. Roy. Soc. **148**. S. 365. 1935.

5) H. Röhl, Diss. Marburg 1933; Ann. d. Phys. [5] **16**. S. 887. 1933; K. Honnefelder, Ztschr. f. phys. Chem. B **21**. S. 53. 1933; D. A. G. Brugge-  
man, Ztschr. f. Phys. **92**. S. 561. 1934.

Tabelle 1

Metall regulär	$\Theta_{\text{elast.}}$ (18° C)		$\Theta_D$ (T°-Gebiet)	Bemerkungen
	1	2		
Cu	325	—	316—323	{ Sp. 2: Bruggeman (Kimura), a. a. O.; Sp. 4: Keesom
Ag	216	212	210—225—170	{ Sp. 2 u. 3: Röhl, a. a. O.; Sp. 4: Keesom
Au	161	158	162	{ Sp. 2 u. 3: Röhl, a. a. O.; Sp. 4: Clusius u. Harteck
Al	394	—	390	{ Sp. 2: Bruggeman (Goens); Sp. 4: Landolt-Börnstein-Tab.
W	372	384	337	{ Sp. 2: Grüneisen; Sp. 3: Honnfelder, a. a. O.; Sp. 4: Lange
Fe	461	—	434—392	{ Sp. 2: Bruggeman (Goens u. Schmid); Sp. 4: Eucken u. Werth; Simon u. Swain
hexag.				
Zn	—	305	200—270—163	{ Sp. 3: Grüneisen u. Goens; Sp. 4: { Keesom u. van den Ende \ Clusius u. Harteck
Cd	—	189	130	{ Sp. 3: Grüneisen u. Goens; Sp. 4: Lange u. Simon

Bruggeman<sup>1)</sup> aus den elastischen Konstanten des Kristalls die des *quasiisotropen* Stoffs, und dann hieraus die  $\Theta_{\text{elast.}}$  nach Debyes bekannter Formel berechnet sind. Für die Zahlen der Spalte 3 wurden im Anschluß an die Born-Kármánsche Theorie die Geschwindigkeiten  $u_j$  der elastischen Wellen als Funktionen der Richtung im Kristall berechnet und dann ein räumlicher Mittelwert  $\bar{u}$  zur Berechnung von  $\Theta$  benutzt. Die beiden Rechenverfahren zeigen keine systematischen Unterschiede.

Die  $\Theta_D$  der Spalte 4 sind heute nur mit großer Unsicherheit angebbar, nachdem sich herausgestellt hat<sup>2)</sup>, daß die nach Debyes T°-Gesetz berechneten  $\Theta_D$  einiger Metalle mit sinkendem T keineswegs konstant bleiben, sondern nach Durchlaufen eines Maximums rasch abnehmen. Diesen Abfall erklärt Keesom durch den Einfluß der spezifischen Wärme der Elektronen, der das beobachtete  $C_v$  vergrößert, das daraus berechnete  $\Theta_D$  verkleinert.

Der Vergleich der  $\Theta_D$  mit den  $\Theta_{\text{elast.}}$  (Tab. 1) zeigt, wenn man den eben erwähnten Abfall außer Betracht läßt, eine leidliche Übereinstimmung. Es ist aber zu bedenken, daß die  $\Theta_{\text{elast.}}$  für 18° C,

1) D. A. G. Bruggeman, Diss. Groningen-den Haag 1930; vgl. auch H. Röhl, a. a. O.

2) Vgl. W. H. Keesom, Ztschr. f. techn. Phys. 15. S. 515. 1934 (Pyrmonter Vortrag, wo auch ältere Literatur angegeben ist).

also etwas zu niedrig berechnet sind<sup>1)</sup>. Mit Rücksicht darauf bleibt es also bei der schon von Hopf und Lechner<sup>2)</sup> bemerkten Ungleichung  $\Theta_{\text{elast.}} > \Theta_D$ .

Immerhin ist die Übereinstimmung bei den regulären Metallen etwas besser, als bei Zn und Cd, die zum Vergleich in Tab. 1 mit aufgenommen sind.

## 2. Übersicht der folgenden Untersuchung

Im folgenden geben wir nun die Rechnungen für das *trigonale* Hg, dessen  $C_v$ -Kurve denen von Zn und Cd in mancher Hinsicht ähnelt. Wir benutzten den schon früher<sup>3)</sup> für Zn und Cd eingeschlagenen Weg: Berechnung der drei Schallgeschwindigkeiten  $u$ , für eine genügend große Zahl von Richtungen (Polarkoordinatenwinkel von 15° zu 15° fortlaufend); für jede Richtung Mittelung nach

$$(1) \quad \frac{1}{u^3} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{u_j^3};$$

räumliche Mittelung über  $u^{-3}$  durch passende Summenbildung über die verschiedenen Richtungen; endlich Berechnung von  $\Theta$  aus dem so erhaltenen Mittelwert der Schallgeschwindigkeit  $\bar{u}$  nach Debyes Formel ( $N$  = Loschmidt'sche Zahl,  $V$  = Molvolumen)

$$(2) \quad \Theta = \frac{\hbar}{k} \bar{u} \left( \frac{3N}{4\pi V} \right)^{1/3}.$$

Der andere Weg zur  $\Theta$ -Berechnung über das Bruggemann'sche quasiiisotrope Kristallaggregat wäre wahrscheinlich einfacher, doch liegen die Formeln für das trigonale System noch nicht vor. Andererseits bietet aber auch die Aufstellung der elastischen Wellenflächen für den trigonalen Hg-Kristall ein selbständiges Interesse. Als wir unsere Rechnungen durchführten, war die Form der Wellenflächen noch für keinen Kristall des trigonalen Systems bekannt. Kürzlich hat sie Bechmann<sup>4)</sup> für Quarz theoretisch berechnet und z. T. experimentell bestätigt. Wir fanden, daß die Wellenflächen in Quecksilber und Quarz einander sehr ähnlich sind.

1) Die  $\Theta_{\text{elast.}}$  müßten schätzungsweise um folgende Beträge erhöht werden, um für das  $T^0$ -Gebiet zu gelten: Fe 1,5%; W < 1,5%; Cu, Ag 2,7%; Al 3,4%; Zn 6%.

2) L. Hopf u. G. Lechner, Verh. d. D. phys. Ges. 1914, S. 643.

3) E. Grüneisen u. E. Goens, a. a. O.

4) R. Bechmann, Hochfrequenztechnik 44, S. 145. 1934; Ztchr. f. Phys.

91, S. 670. 1934; vgl. auch J. Koga, Phil. Mag. 16, S. 275. 1933.

Besondere Schwierigkeiten, die wir bisher nicht haben lösen können, treten auf, wenn man nach den Richtungen fragt, in denen die elastischen Verrückungen stattfinden, die zu den drei in einer Richtung sich fortpflanzenden Wellen gehören. Für die  $\Theta$ -Berechnung ist diese Frage jedoch ohne Bedeutung.

### 3. Die Geschwindigkeiten elastischer Wellen in trigonalen Kristallen

Der Kristall sei unendlich ausgedehnt. Wir orientieren ein rechtwinkliges Koordinatensystem so, daß die  $Z$ -Achse mit der trigonalen Hauptachse, die  $X$ -Achse mit der zweizähligen Symmetriechse zusammenfällt. Die  $+Y$ -Richtung soll aus der Mitte einer der um die  $+Z$ -Achse gruppierten Flächen des Elementarrhomboeders austreten.

Sei  $u$  die Wellengeschwindigkeit in irgendeiner Richtung,  $q = \rho u^2$ , wo  $\rho$  die Dichte des Kristalls, so gilt nach der von Christoffel stammenden Theorie<sup>1)</sup> für  $q$  eine Gleichung

$$(3) \quad q^3 + aq^2 + bq + c = 0,$$

deren drei reelle Wurzeln  $q_j (j = 1, 2, 3)$  den drei in jener Richtung möglichen elastischen Wellen mit den Geschwindigkeiten  $u_j$ , zuzuordnen sind. Die Fortpflanzungsrichtung bilde mit  $X, Y, Z$  die Richtungskosinus  $\alpha, \beta, \gamma$ , ferner seien  $c_{hk}$  die Hauptelastizitätskonstanten des Kristalls in Voigtscher Bezeichnung, dann berechnen sich die Koeffizienten  $a, b, c$  für das trigonale System wie folgt<sup>2)</sup>:

$$(4) \quad -a = A_1 + A_2 \gamma^2$$

mit

$$(5) \quad \begin{aligned} A_1 &= c_{11} + c_{44} + c_{66}; \quad A_2 = c_{33} + c_{44} - (c_{11} + c_{66}); \\ b &= B_1(\alpha^2 + \beta^2)^2 + B_2 \gamma^4 + B_3(\alpha^2 + \beta^2) \gamma^2 - B_4(3\alpha^2 \beta \gamma - \beta^2 \gamma) \end{aligned}$$

mit

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} B_1 &= c_{11} c_{66} + c_{11} c_{44} + c_{44} c_{66} - c_{14}^2; \quad B_2 = c_{44}^2 + 2c_{33} c_{44}; \\ B_3 &= (c_{11} + c_{66})(c_{44} + c_{33}) + 2c_{44}^2 - (c_{13} + c_{44})^2 - 4c_{14}^2; \\ B_4 &= 2c_{14}(c_{13} + c_{44} + c_{66} + c_{12}); \\ -c &= C_1 \alpha^6 + C_2 \beta^6 + C_3 \gamma^6 + C_4 \alpha^4 \beta^2 + C_5 (\alpha^2 + \beta^2)^2 \gamma^2 + C_6 \alpha^4 \beta \gamma \\ &\quad + C_7 \alpha^2 \beta^4 + C_8 \alpha^2 \beta^2 \gamma + C_9 (\alpha^2 + \beta^2) \gamma^4 \\ &\quad + C_{10} \alpha^2 \beta \gamma^3 + C_{11} \beta^5 \gamma + C_{12} \beta^3 \gamma^3 \end{aligned} \right\}$$

1) Vgl. z. B. A. E. H. Love, Lehrb. d. Elast., deutsch von A. Timpe, 1907, § 208; K. Försterling, Ann. d. Phys. [4] 61. S. 549. 1920; R. Bechmann, a. a. O.

2) Vgl. K. Försterling, a. a. O.; über einen dort vorhandenen Druckfehler, vgl. K. Honnfelder, a. a. O. S. 55, Anmerkung.

mit

$$\begin{aligned}
 C_1 &= c_{11} c_{44} c_{66} - c_{11} c_{14}^2; \quad C_2 = c_{11} c_{44} c_{66} - c_{66} c_{14}^2; \\
 C_3 &= c_{33} c_{44}^2; \quad C_4 = 3 c_{11} c_{44} c_{66} + c_{14}^2 (6 c_{11} - 9 c_{66}); \\
 C_5 &= c_{11} (c_{33}^2 + c_{33} c_{66}) + c_{14}^2 (4 c_{13} - c_{44}) - c_{13} c_{66} (2 c_{44} + c_{13}); \\
 C_6 &= 6 c_{14} [c_{14}^2 - c_{11} c_{44} - c_{13} c_{66}]; \\
 C_7 &= 3 c_{11} c_{44} c_{66} + c_{14}^2 (6 c_{66} - 9 c_{11}); \\
 C_8 &= 2 c_{14} [2 c_{14}^2 - 2 c_{11} c_{44} + c_{13} c_{44} - 3 c_{13} c_{66}]; \\
 C_9 &= c_{33} c_{44} (c_{11} + c_{66}) - 4 c_{33} c_{14}^2 - c_{44} c_{13} (2 c_{44} + c_{13}); \\
 C_{10} &= 2 c_{13} c_{44} (c_{66} + 3 c_{13} + 3 c_{44}) - 2 c_{14} c_{33} (3 c_{11} - 2 c_{66}); \\
 C_{11} &= 2 c_{14} (c_{11} c_{44} - c_{14}^2 + c_{13} c_{66}); \\
 C_{12} &= 2 c_{14} (c_{11} c_{33} - c_{33} c_{66} - c_{13} c_{44} - c_{13}^2).
 \end{aligned}$$

Hat man das System der  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  aus den Elastizitätskonstanten eines trigonalen Kristalls ausgerechnet, so findet man die Koeffizienten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  für irgendeine Richtung  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  aus den Gl. (4), (5), (6) und hat dann die kubische Gl. (3) aufzulösen. Die Aufgabe vereinfacht sich für die Achsenrichtungen und für die  $XY$ -,  $ZX$ -,  $ZY$ -Ebene. Für die  $ZY$ -Ebene zerfällt die kubische Gleichung in eine lineare und eine quadratische<sup>1)</sup>. Wegen der trigonalen Symmetrie gilt die Lösung in der  $ZX$ - und  $ZY$ -Ebene auch für die mit ihnen einen Winkel von  $120^\circ$  einschließenden Ebenen durch die  $Z$ -Achse. Wir haben die Auflösung der kubischen Gleichung noch in derjenigen Ebene („ $ZD$ -Ebene“) durchgeführt, welche den Winkel zwischen den  $ZX$ - und  $ZY$ -Ebenen halbiert (vgl. Fig. 1).

Für die Achsenrichtungen findet man die Lösungen in umstehender tabellarischer Zusammenstellung.

Setzt man hier  $c_{14} = 0$ , so hat man die Lösungen für das hexagonale System<sup>2)</sup>. Während bei diesem die Schallgeschwindigkeiten in der  $XY$ -Ebene konstant sind, schwanken sie im trigonalen System zwischen Extremwerten für die  $X$ - und  $Y$ -Achse hin und her (Fig. 1). Dies überrascht, weil die spezifischen Dehnungen  $s_{33}'$  von Stäben, das sind die reziproken Dehnungsmoduln, in der  $XY$ -Ebene konstant bleiben<sup>3)</sup>. Der Grund für die mangelnde Rotationssymmetrie

1) Vgl. R. Bechmann, a. a. O.

2) Vgl. E. Grüneisen u. E. Goens, Ztschr. f. Phys. **26**, S. 235. 1924, Tab. 4.

3) Vgl. W. Voigt, Krystallphysik § 376; E. Grüneisen u. O. Sekell, Ann. d. Phys. [5] **19**, S. 387. 1934, Fig. 7 u. 8.

	$q_1$	$q_2$	$q_3$
Z-Achse . . .	$c_{33}$	$c_{44}$	$c_{44}$
X-Achse . . .	$c_{11}$	$\frac{c_{44} + c_{66}}{2} + \sqrt{\left(\frac{c_{44} - c_{66}}{2}\right)^2 + c_{14}^2}$	$\frac{c_{44} + c_{66}}{2} - \sqrt{\left(\frac{c_{44} - c_{66}}{2}\right)^2 + c_{14}^2}$
Y-Achse . . .	$\frac{c_{11} + c_{44}}{2} + \sqrt{\left(\frac{c_{11} - c_{44}}{2}\right)^2 + c_{14}^2}$	$\frac{c_{11} + c_{44}}{2} - \sqrt{\left(\frac{c_{11} - c_{44}}{2}\right)^2 + c_{14}^2}$	$c_{66}$

der  $q$  liegt wohl in dem wenig durchsichtigen System von Verschiebungen, das mit der Schallausbreitung im unendlich ausgedehnten Kristall verknüpft ist (vgl. 5).

#### 4. Die Hauptelastizitätskonstanten des Quecksilbers

Den folgenden Berechnungen liegen die früher<sup>1)</sup> veröffentlichten Messungen der Hauptelastizitätsmoduln von Hg zugrunde. Als wahrscheinliche Werte ergaben sich in  $10^{-12} [\text{cm}^2 \text{ Dyn}^{-1}]$  bei  $-190^\circ \text{C}$ :

$$s_{11} = 15,4; \quad s_{33} = 4,5; \quad s_{44} = 15,1; \\ s_{12} = -11,9; \quad s_{13} = -2,1; \quad s_{14} = -10.$$

Über die Unsicherheit dieser Zahlen ist a.a.O. ausführlich gesprochen. Z. B. wurde auf das Vorzeichen von  $s_{14}$  aus der hypothetischen Bedingung geschlossen, daß die Extremwerte der elastischen Dehnbarkeit in die Normalen dichtbesetzter Netzebenen fallen sollten. Es sei hier bemerkt, daß sich diese Hypothese nach einer von G. Fischbach durchgeführten Untersuchung an anderen einatomigen Kristallen des trigonalen und tetragonalen Systems Bi, Sb, Sn (auf Grund der Bridgmanischen Messungen der Elastizitätskonstanten) als zutreffend erwiesen hat.

Aus den  $s_{hk}$  ergeben sich die folgenden  $c_{hk}^2$  in  $[\text{Dyn cm}^{-2}]$  bei  $-190^\circ \text{C}$ :

$$c_{11} = 0,360; \quad c_{33} = 0,505; \quad c_{44} = 0,129; \\ c_{12} = 0,28; \quad c_{13} = 0,30; \quad c_{14} = 0,047; \\ c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) = 0,035.$$

#### 5. Die Geschwindigkeiten der elastischen Wellen im Quecksilberkristall

Nach den Formeln (4), (5), (6) wurden die Koeffizienten  $a, b, c$  der kubischen Gl. (3) für alle diejenigen Richtungen in der  $ZX$ -

1) E. Grüneisen u. O. Sckell, Ann. d. Phys. [5] 19. S. 387. 1934.

2) Nach den Formeln bei W. Voigt, Kristallphysik § 376, Gl. (460).

ZY- und ZD-Ebene (und damit zugleich für die XY-Ebene) berechnet, die mit der Z-Achse Winkel bilden, die von 15° zu 15° fortschreiten. Die trigonometrische Lösungsmethode ergab für jede Richtung drei Wurzeln  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  der Gl. (3) und daraus die entsprechenden Wellengeschwindigkeiten  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  (Tab. 2). Ihre Zahl genügt, um die Schnittkurven der Wellenflächen mit der XY-, ZX-, ZY- und ZD-Ebene (Figg. 1—4) zu zeichnen.

Tabelle 2  
Geschwindigkeit elastischer Wellen im Hg-Kristall in  $10^4$  cm/sec.

arcos $\gamma$ in °	ZX-Ebene			ZY-Ebene			ZD-Ebene		
	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
0	Z 18,7	9,4 <sub>3</sub>	9,4 <sub>3</sub>	Z 18,7	9,4 <sub>3</sub>	9,4 <sub>3</sub>	Z 18,7	9,4 <sub>3</sub>	9,4 <sub>3</sub>
15	18,9	9,6 <sub>4</sub>	8,2 <sub>5</sub>	18,7	10,0	7,9 <sub>7</sub>	18,8	10,1	7,8 <sub>7</sub>
30	19,0	9,1 <sub>8</sub>	6,4 <sub>9</sub>	18,6	10,1	6,3 <sub>7</sub>	18,7	9,6 <sub>9</sub>	6,5 <sub>8</sub>
45	18,7	7,9 <sub>4</sub>	5,7 <sub>1</sub>	17,8	9,4 <sub>5</sub>	6,2 <sub>1</sub>	18,1	8,9 <sub>1</sub>	6,1 <sub>6</sub>
60	17,9	6,9 <sub>7</sub>	6,0 <sub>2</sub>	16,5	8,3 <sub>0</sub>	7,8 <sub>8</sub>	17,0	8,1 <sub>8</sub>	7,0 <sub>4</sub>
75	16,5	9,0 <sub>6</sub>	4,2 <sub>0</sub>	15,4	9,5 <sub>8</sub>	6,7 <sub>9</sub>	15,8	9,4 <sub>4</sub>	5,9 <sub>8</sub>
90	X 15,8	10,1	3,3 <sub>1</sub>	Y 16,0	9,0 <sub>8</sub>	4,9 <sub>6</sub>	D 15,8	9,7 <sub>5</sub>	4,0 <sub>9</sub>
105	wie 75°			17,6	7,2 <sub>5</sub>	3,5 <sub>6</sub>	17,3	7,7 <sub>8</sub>	3,6 <sub>7</sub>
120	wie 60°			18,8	6,0 <sub>9</sub>	3,5 <sub>8</sub>	18,6	6,0 <sub>8</sub>	4,7 <sub>8</sub>
135	wie 45°			19,4	6,7 <sub>0</sub>	4,9 <sub>3</sub>	19,2	6,9 <sub>6</sub>	5,2 <sub>8</sub>
150	wie 30°			19,3	8,3 <sub>8</sub>	6,6 <sub>8</sub>	19,2	8,5 <sub>9</sub>	6,6 <sub>0</sub>
165	wie 15°			18,9	9,5 <sub>9</sub>	8,2 <sub>7</sub>	18,9	9,3 <sub>8</sub>	8,4 <sub>3</sub>
180	wie 0°			-Z 18,7	9,4 <sub>3</sub>	9,4 <sub>3</sub>	-Z 18,7	9,4 <sub>3</sub>	9,4 <sub>3</sub>

Man erhält die Spuren von drei Wellenflächenschalen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Die zur ersten gehörige Welle kann als Longitudinalwelle, die beiden andern können als Transversalwellen bezeichnet werden, obwohl die Schwingung der von der Welle ergriffenen materiellen Elemente nach der Theorie bei  $a$  nicht immer parallel zur Wellenfortpflanzung, bei  $b$  und  $c$  nicht immer senkrecht zu ihr erfolgt.

Auch ist es nicht möglich, der einen Transversalwellenfläche, etwa der äußeren  $b$ , die Schwingrichtung  $\parallel$  zum „Hauptschnitt“ (Ebene durch die trigonale Achse), der anderen die Schwingrichtung  $\perp$  zum Hauptschnitt zuzuordnen, denn, wie Bechmann (a. a. O.) bereits gezeigt hat, läßt die Theorie leicht erkennen, daß im YZ-Hauptschnitt das  $\perp$ -Zeichen, d. h. eine genau in die X-Richtung fallende Schwingrichtung, von der Kurve  $b$  zur Kurve  $c$  hinüberwechselt (Fig. 3). Eine allgemeine Erforschung der Schwingrichtungen auf den verschiedenen Strahlrichtungen scheint recht kompliziert zu sein; nur daß alle drei aufeinander senkrecht stehen, ist leicht zu zeigen. Ferner ist zu vermuten, daß sich die Schwingrichtungen in der Nähe

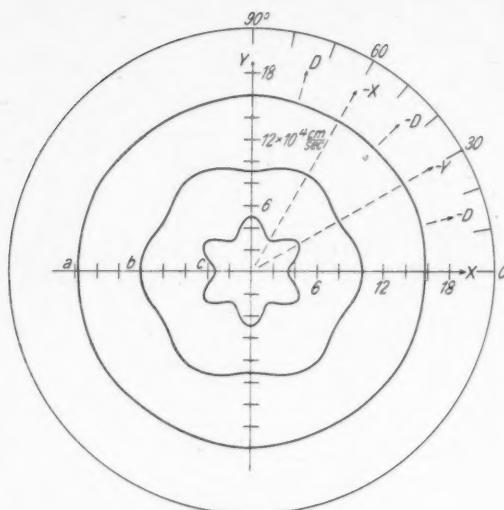


Fig. 1. XY-Ebene

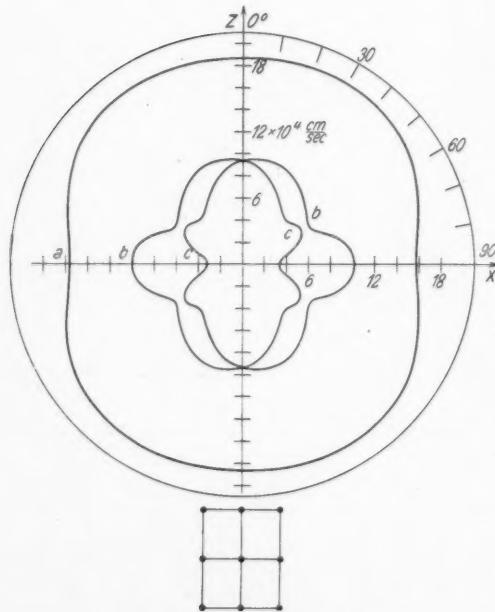


Fig. 2. XZ-Ebene

der Berührungs-  
punkte von *b* und  
*c* sehr rasch mit  
der Strahlrich-  
tung verändern.

Für unser  
Ziel der  $\Theta$ -Be-  
rechnung spielt  
die Frage der  
Schwingrich-  
tungen keine Rolle.  
Wir werden sie  
deshalb nicht  
weiter behandeln.

Um ein Bild  
der Wellenflä-  
chen zu bekom-  
men, hat man sich  
die Hauptschnitte  
 $ZX$ ,  $ZY$ ,  $ZD$  auf  
dem  $XY$ -Schnitt  
 $\perp$  angeordnet zu  
denken, unter Be-  
achtung der den  
 $X$ -,  $Y$ -,  $D$ -Rich-  
tungen nebenge-  
schriebenen Vor-  
zeichen (Fig. 1).  
Von den drei  
Flächen umhüllt  
*a* die beiden an-  
deren in ziemlich  
weitem Abstand,  
auch *b* umhüllt *c*,  
aber diese beiden  
Flächen berühren  
sich unter trich-  
terförmiger Ein-  
dellung der äußeren,  
Auftriebung der  
inneren Flä-  
che erstens in

der Z-Achse (2 Punkte), zweitens in den drei ZY-Ebenen unter etwa  $62^\circ$  gegen die Z-Achse (6 Punkte). Es gibt also 4 Richtungen, in denen die Geschwindigkeiten der beiden Transversalwellen einander gleich werden. Es ist interessant, die allmähliche Formänderung der Schnittkurven beim Übergang von der ZX- zur ZY- über die ZD-Ebene zu verfolgen. In den Kurven prägt sich die symmetrische (ZX) oder verzerrte (ZY) Anordnung des Atomgitters aus, wie es beim Blick auf die entsprechenden Ebenen erscheint (Figg. 2 und 3 unten).

Die Schnittkurven in der XY-Ebene sind, wie schon gesagt, nicht Kreise, sondern Kurven sechszähliger Symmetrie. Die

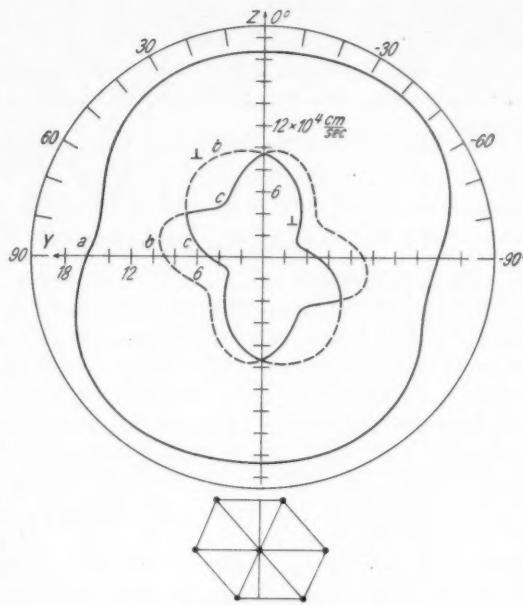


Fig. 3. ZY-Ebene

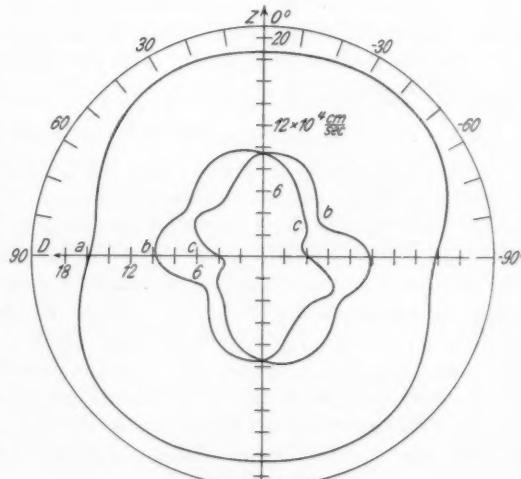


Fig. 4. ZD-Ebene

Anisotropie der Wellengeschwindigkeit ist für die *a*-Kurve sehr gering, nimmt aber über *b* nach *c* stark zu.

Auf die Analogien zur Optik doppelbrechender Kristalle soll nur hingewiesen werden. Dort liegen die Verhältnisse aber einfacher.

#### 6. Vergleich mit den elastischen Wellenflächen des Quarzes

Um den Vergleich unserer Ergebnisse für Hg mit den Bechmannschen<sup>1)</sup> für Quarz zu erleichtern, seien in Fig. 5 die Geschwindigkeiten der *ZX*- und *ZY*-Ebene noch einmal in derselben

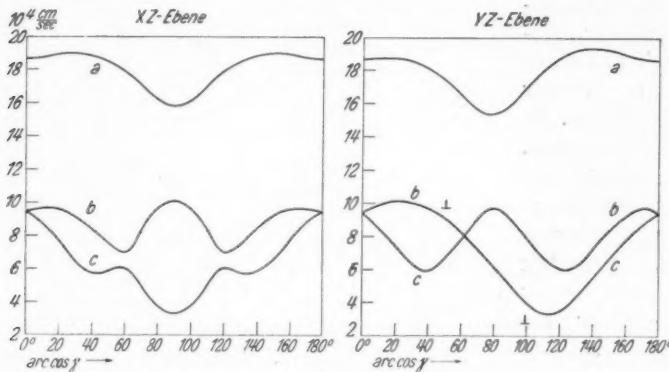


Fig. 5

Weise dargestellt, wie bei Bechmann für Quarz. Die Kurven ähneln sich sehr stark, auch beim Quarz liegt der Berührungs punkt von *b* und *c* (*ZY*-Schnitt) bei etwa  $65^\circ$ .

#### 7. Berechnung von $\Theta$ für Quecksilber

Aus den  $u_j$  der Tab. 1 bildeten wir nach Formel (1) für jede ausgewählte Richtung ein mittleres  $u^{-3}$ . Zwecks räumlicher Mittelung von  $u^{-3}$  teilten wir die Oberfläche der Einheitshalbkugel in sechs Zonengürtel von  $15^\circ$  Breite um die trigonale Achse. Den Zonen- grenzen (Breitenkreisen von  $15, 30, \dots 90^\circ$ ) rechneten wir arithmetische Mittelwerte der  $u^{-3}$  in den Ebenen durch  $+X, +D, +Y, +D, -X, -D, -Y, -D$  (also über einen Winkelbereich von  $120^\circ$ ) zu, den Zonen selbst aber die Mittelwerte ihrer Grenzen. Multipliziert man jeden dieser Mittelwerte mit dem relativ zur Halbkugeloberfläche gerechneten Flächeninhalt der Zone ( $\gamma_0 - \gamma_1, \dots, \gamma_5 - \gamma_6$ ), so gibt die Summe dieser Produkte einen brauchbaren Mittel-

1) In seiner Arbeit *Zeitschr. f. Phys.* 91, S. 670. 1934.

wert  $u^{-3} = 3580 \cdot 10^{-18}$ . Die Kubikwurzel aus dem Reziproken dieser Zahl

$$u = 6,54 \cdot 10^4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

nehmen wir als mittlere Geschwindigkeit der elastischen Wellen des Hg im  $T^3$ -Gebiet und finden damit nach Formel (2)

$$\Theta_{\text{elast.}} = 68,6 \text{ (bei } -190^\circ \text{ C).}$$

#### 8. Vergleich mit $\Theta_D$

Die Atomwärme von Hg läßt sich bekanntlich ebensowenig wie die von Zn und Cd durch eine Debye-Funktion mit konstantem  $\Theta_D$  darstellen<sup>1)</sup>. Aus den Messungen von Pollitzer<sup>2)</sup>, die sich auf Temperaturen über  $20^\circ \text{ K}$  beschränken, könnte man auf  $\Theta_D = 96$  etwa schließen. Unterhalb  $20^\circ$  bis etwa  $10^\circ \text{ K}$  findet Simon<sup>3)</sup> einen verlangsamten Abfall von  $C_p$  und dementsprechend eine Abnahme des nach Debye berechneten  $\Theta_D$  bis etwa 80. Unterhalb  $7^\circ \text{ K}$  bis  $2,93^\circ \text{ K}$  haben Kamerlingh Onnes und Holst<sup>4)</sup> zwei Messungen von  $C_p$  mitgeteilt, aus denen sie auf etwa  $\Theta_D = 60$  schließen.

Es scheint danach, daß bei Hg der aus den elastischen Konstanten berechnete  $\Theta$ -Wert dem im  $T^3$ -Gebiet geltenden  $\Theta_D$ -Wert, der bisher nicht mit genügender Sicherheit festgestellt ist, näher kommt, als dies bei Zn und Cd nach Tab. 1 der Fall ist. Ein Unterschied zwischen diesen Metallen besteht auch darin, daß in höherer Temperatur  $\Theta_{\text{elast.}}$  für Zn und Cd wesentlich  $> \Theta_D$ , für Hg wesentlich  $< \Theta_D$  ist.

Den Herren Bechert (Gießen) und Goens (Charlottenburg) danken wir für belehrende Hinweise.

1) Vgl. z. B. die Fig. 1 bei E. Grüneisen u. E. Goens, a. a. O.

2) F. Pollitzer, Ztschr. f. Elektrochem. 19. S. 513. 1913.

3) F. Simon, Ztschr. f. phys. Chem. 107. S. 279. 1923.

4) H. Kamerlingh Onnes u. G. Holst, Comm. Leiden 142c. S. 30. 1914.

Marburg (Lahn), Physikalisches Institut, März 1935.

(Eingegangen 4. März 1935)

**Über die elektromagnetische Masse des Diracelektrons**  
**Von Nikolai Kemmer**

§ 1. Einleitung

Es ist hinlänglich bekannt, welche Schwierigkeiten in der Quantenelektrodynamik durch das Unendlichwerden der Selbstenergie des Elektrons entstehen. Man begegnet allerdings der gleichen Situation auch schon in der klassischen Elektronentheorie<sup>1)</sup>, wenn man das Elektron als ausdehnungslos beschreiben will; während aber dort die Möglichkeit offen bleibt, mit einem ausgedehnten Elektron zu rechnen, hat sich die Quantenelektrodynamik nur für das Punktelektron korrekt formulieren lassen.

Die Schwierigkeit stellt sich dabei nicht der Einführung des „Elektronenradius“ an sich entgegen, sondern lediglich dem Versuch, dieses Vorgehen mit der Forderung relativistischer Invarianz zu vereinbaren<sup>2)</sup>. Auf welche Weise einer „Gestalt“ des Elektrons Rechnung getragen werden kann, ist schon mehrfach erörtert worden<sup>3)</sup>. Bei der (rechnerisch bequemsten) Darstellung im Impulsraum geschieht dies bekanntlich einfach durch „Abschneiden“ der auftretenden Integrale an einer oberen Grenze, wodurch eben die relativistische Invarianz der Gleichungen verloren geht. Dennoch ist eine *provisorische* Einführung eines Elektronenradius für die Zwecke dieser Arbeit bequem, da dann zunächst endliche Ausdrücke gewonnen werden, die einen Vergleich mit den entsprechenden klassischen zulassen. Um invariante Ergebnisse zu erhalten, muß man dann freilich in den Endformeln doch die Integrationsgrenze ins Unendliche verlegen, was zu den bekannten Divergenzen führt.

Für das freie Diracelektron wurde die Selbstenergie von Waller<sup>4)</sup> explizit berechnet. Wenn man den von ihm angegebenen Ausdruck um die elektrostatische Selbstenergie vermehrt, wie sie z. B. von Weisskopf<sup>5)</sup> angeführt wird, ergibt sich, zusammengefaßt:

1) Die in vorliegender Arbeit benutzten Aussagen der klassischen Elektronentheorie sind z. B. sämtlich zu finden bei H. A. Lorentz, *The theory of electrons*. Leipzig, Teubner, 1916.

2) Vgl. Handb. d. Phys., Geiger-Scheel, 2. Aufl., Bd. XXIV, 1, Kap. 2 (W. Pauli), S. 269ff.

3) M. Born u. G. Rumer, Ztschr. f. Phys. 69, S. 141. 1931. Vgl. auch Anm. 2).

4) I. Waller, Ztschr. f. Phys. 62, S. 673. 1930. Vgl. auch R. Oppenheimer, Phys. Rev. 35, S. 461. 1930.

5) V. Weisskopf, Ztschr. f. Phys. 89, S. 27. 1934.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{E}^{(1)} = \frac{e^2}{2\pi} \left[ \frac{1-\beta^2}{\beta} \cdot \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \int_0^\infty g(k) dk \right. \\ \quad \left. + 2(1-\beta^2)^{1/2} \cdot \int_0^\infty \frac{k}{\pi} g(k) dk \right], \end{array} \right.$$

mit

$$\beta = \frac{c \cdot \text{Impuls}}{\text{Energie}}, \quad x = \frac{mc}{\hbar}.$$

Der hier zur üblichen Form hinzutretende Faktor  $g(k)$  drückt das eben erwähnte „Abschneiden“ aus. Er wird in § 9 ausführlich begründet werden; hier genügt die Bemerkung, daß Integrale der Gestalt

$$\int_0^\infty k^n g(k) dk$$

in der Diskussion der Gleichungen bis auf Faktoren von der Größenordnung 1 mit den entsprechenden Potenzen  $1/R^{n+1}$  des reziproken Elektronenradius identifiziert werden dürfen.

Der erste Summand in (1) geht mit  $1/R$  und stimmt in allen wesentlichen Punkten überein mit den Ausdrücken, die in der klassischen Elektronentheorie errechnet werden, während der zweite, zu  $1/R^2$  proportionale Term einen der klassischen Theorie völlig fremden Charakter hat (und in der Grenze  $\hbar \rightarrow 0$  verschwindet). Da nun klassisch von einem entsprechenden Energieausdruck formal und begrifflich ein kleiner Schritt zur Vorstellung der „elektromagnetischen Masse“ führt, scheint es naheliegend, auch dem ersten Summanden von (1) im Sinne einer *elektromagnetischen Masse* des Diracelektrons eine Deutung zu geben.

Als Ergebnis der im folgenden dargestellten Untersuchung darf nun behauptet werden, daß einer solchen Schlußweise sehr wenig Berechtigung zukommt. Die elektromagnetische Masse ist allgemein zu definieren als der Koeffizient desjenigen Termes der Eigenkraft, der zur Beschleunigung proportional ist. Bei der Anwendung dieser Begriffsbildung auf das Diracelektron wird man jedoch zu der Feststellung geführt, daß

1. der so definierte Ausdruck in keinem leicht ersichtlichen Zusammenhang mit (1) steht, und

2. wegen des Auftretens der Zustände negativer Energie der elektromagnetischen Masse dort überhaupt nur unter den größten Vorbehalten eine physikalische Bedeutung zugesprochen werden kann.

Im Hinblick auf den hierbei entscheidenden Einfluß der negativen Energieniveaus liegt es nahe, die gleichen Überlegungen im

Rahmen der „Löchertheorie“ zu wiederholen. Qualitative Betrachtungen lassen dabei schon erkennen, daß die elektromagnetische Masse hier in sinnvollerer Weise definierbar sein dürfte; eine exakte Begründung läßt sich aber nicht erzielen, solange die bekannten Schwierigkeiten der Löchertheorie (Vakumpolarisation! vgl. S. 704) nicht geklärt sind. Formal ergibt sich ein zu  $\log R$  proportionaler Ausdruck für die Masse.

### § 2. Allgemeines über Impulssatz und Eigenkräfte

In der klassischen Elektronentheorie<sup>1)</sup> erfolgt die Herleitung der elektromagnetischen Masse auf dem Wege über den Feldimpuls. Es läßt sich dort die vom Eigenfeld eines Teilchens auf dieses ausgeübte Kraft darstellen als

$$(2) \quad \mathfrak{R}^{(i)} = e \left\{ \mathfrak{E}(\mathfrak{x}) + \frac{1}{c} [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}(\mathfrak{x})] \right\} = - \frac{d}{dt} \mathfrak{G},$$

mit

$$(3) \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{4\pi c} \int dX' [\mathfrak{E}(\mathfrak{x}'), \mathfrak{H}(\mathfrak{x}')], \quad (dX' = dx' dy' dz'),$$

so daß die Bewegungsgleichung

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \mathfrak{p} = \mathfrak{R}$$

auf die Form

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{p} + \mathfrak{G}) = \mathfrak{R}^{(a)}$$

gebracht werden kann, wo  $\mathfrak{R}^{(a)}$  eine etwa noch vorhandene äußere Kraft darstellt. Es ist dabei  $\mathfrak{x}$  der Ort der Partikel,  $\mathfrak{v}$  deren Geschwindigkeit und  $(\mathfrak{E}(\mathfrak{x}); \mathfrak{H}(\mathfrak{x}))$  das vom Teilchen am Orte  $\mathfrak{x}'$  erzeugte elektromagnetische Feld.

$\mathfrak{G}$  ist eine für beliebig gewählte Teilchenform berechenbare, dem reziproken Elektronenradius proportionale Funktion der Teilchengeschwindigkeit. Ist demnach letztere konstant, so übt das vom Elektron „mitgeführte“ Eigenfeld keine Kraft aus:

$$\mathfrak{R}^{(i)} = - \frac{d}{dt} \mathfrak{G} = 0,$$

wenn

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{p} = 0.$$

Wenn jedoch eine äußere Kraft bereits eine Geschwindigkeitsänderung verursacht, so treten dazu auch noch Eigenkräfte auf. Wenn die äußere Störung schwach ist, darf angenommen werden,

1) Vgl. Anm. 1, S. 674.

daß für den Feldimpuls in jedem Augenblick der für das kraftfreie Teilchen derselben Geschwindigkeit errechnete Wert

$$\mathfrak{G} = \frac{\dot{\xi}}{v} G(v), \quad (v = |\dot{\xi}|),$$

eingesetzt werden kann, und es wird dann

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{G} = \ddot{\xi}_l \frac{\partial G}{\partial v} + \ddot{\xi}_{tr} \frac{G}{v}$$

( $\ddot{\xi}_l$  = longitudinale Beschleunigung,

$\ddot{\xi}_{tr}$  = transversale „ „ „ ).

Andererseits gilt, unter Einführung der („mechanischen“) Ruhmasse  $m$ :

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ddot{\xi}_l + \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ddot{\xi}_{tr} = \frac{\partial p}{\partial v} \ddot{\xi}_l + \frac{p}{v} \ddot{\xi}_{tr},$$

$$\left( p = |\mathfrak{p}| = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right),$$

so daß die Bewegungsgleichung umgeschrieben werden kann in

$$(5) \quad \mathfrak{R}^{(a)} = \ddot{\xi}_l \frac{\partial}{\partial v} (p + G) + \ddot{\xi}_{tr} \frac{1}{v} (p + G).$$

Die Deutung von  $\partial G / \partial v$  bzw.  $G/v$  als longitudinale bzw. transversale elektromagnetische Masse liegt damit auf der Hand<sup>1)</sup>.

Geht man über die geschilderte „quasistationäre“ Näherung hinaus, so treten in (5) noch Zusatzterme der Eigenkraft links hinzu; für ein praktisch ausdehnungsloses Teilchen reduzieren sich diese auf die „Strahlungsdämpfung“, die dadurch gekennzeichnet ist, daß sie von der Gestalt des Elektrons unabhängig und der Ableitung der Beschleunigung ( $\ddot{\xi}$ ) proportional ist.

Es erhebt sich nun die Frage, ob man auch im quantentheoretischen Formalismus eine solche quasistationäre Beschreibungsweise durchführen, und einen Trägheitsterm in der Eigenkraft abspalten kann.

Zunächst existiert bekanntlich in der Quantenelektrodynamik eine Bewegungsgleichung, die analog zu (4) lautet:

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{p} = \mathfrak{R},$$

1) Das Bestreben der klassischen Theorie war bekanntlich, gegenüber diesen die entsprechenden mechanischen Massen  $\partial p / \partial v$  bzw.  $p/v$  zu streichen. Klassisch läßt sich das in der Tat von vornherein machen, wir ziehen es jedoch vor, die mechanischen Massen beizubehalten, da sie in der folgenden störungsmäßigen quantentheoretischen Rechnung auch notwendig beibehalten werden müssen.

nur ist dies nunmehr eine Operatorgleichung, in welcher definitionsgemäß

$$(6) \quad \mathfrak{p} = \frac{\hbar}{i} \operatorname{grad} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}(\mathfrak{x}, t)$$

und

$$\mathfrak{A} = e \left\{ \mathfrak{E}(\mathfrak{x}, t) + [\vec{a}, \mathfrak{H}(\mathfrak{x}, t)] \right\}$$

ist.

Dabei sind die  $\alpha$  die bekannten Diracschen Matrizen, und die Operatoren  $\mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \mathfrak{H}$  wirken auf die Feldvariablen (etwa die „Photonenzahlen“) in einer Weise, die erst später präzisiert zu werden braucht.

Ferner ist jetzt ebenfalls die Einführung eines „Feldimpulses“  $\mathfrak{G}$  möglich, der (2) befriedigt und formal wieder durch (3) darstellbar erscheint<sup>1)</sup>.

Die störungsmäßige Berechnung von  $\mathfrak{G}$  für das Diracelektron wird weiter unten ausgeführt werden; hier sei nur vorweggenommen, daß für seinen Erwartungswert, zunächst im Falle, daß äußere Kräfte fehlen, die Darstellung [Gl. (30)] gefunden werden wird<sup>2)</sup>:

$$(7) \quad \overline{\mathfrak{G}} = \sum_{\varrho=1,2} \int dJ |b_{\varrho}(\mathfrak{j})|^2 \mathfrak{G}(\mathfrak{j}),$$

$$(8) \quad \mathfrak{G}(\mathfrak{j}) = \frac{1}{j} G(j)$$

$$\begin{aligned} j &= \text{Eigenwert von } -i \operatorname{grad}, \quad j = |j|, \\ dJ &= d\mathfrak{j}_x d\mathfrak{j}_y d\mathfrak{j}_z, \quad \varrho = (1, \dots, 4) = \text{Spinindex}. \end{aligned}$$

Es ist dabei  $G(j)$  eine explizit berechenbare Funktion, die den Feldimpuls der Eigenschwingung  $j$  darstellt. Im invarianten Grenzfall wird  $G$  allerdings, entsprechend der Selbstenergie, unendlich groß.

Die  $b_{\varrho}(\mathfrak{j})$  geben die Zusammensetzung des zugrundegeriebene Wellenpakets an:

$$(9) \quad \varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\varrho} \int dJ b_{\varrho}(\mathfrak{j}) e^{-i \mathfrak{J}^{\varrho}(\mathfrak{j}) \cdot \mathfrak{e} \cdot t} \varphi^{\varrho}(\mathfrak{j}, \mathfrak{x}).$$

Hierbei bedeuten:

$$\varphi^{\varrho}(\mathfrak{j}, \mathfrak{x}) = e^{i(\mathfrak{j}, \mathfrak{x})} u^{\varrho}(\mathfrak{j}),$$

1) Bis auf  $c$ -Zahl Zusatzglieder, die mit der Beseitigung der Nullpunktsenergie der Strahlung zusammenhängen. (Vgl. hierzu den in Anm. 2, S. 674 zitierten Handbuchartikel von W. Pauli.) Außerdem muß bei Einführung eines „endlichen Elektrons“ entweder in (3) oder in (18) noch eine Änderung getroffen werden, wie in § 9 erläutert wird. Dieser entspricht das Auftreten des Nenners  $g(k)$  in (20), (22).

2) Aber nur, wenn das Wellenpaket aus Zuständen positiver Energie allein aufgebaut ist ( $\varrho = 1$  und 2).

mit

$$I^{\varrho}(\mathbf{j}) = \begin{cases} +I(\mathbf{j}) = +\sqrt{j^2 + \mathbf{x}^2} & \text{für } \varrho = 1,2, \\ -I(\mathbf{j}) = -\sqrt{j^2 + \mathbf{x}^2} & \text{„ } \varrho = 3,4 \end{cases}$$

die bekannten Wellenfunktionen des freien Diracelektrons, und für die vierkomponentigen  $u^{\varrho} = (u_1^{\varrho}, \dots, u_4^{\varrho})$  bestehen, wie üblich, die Relationen:

$$(10) \quad \{u^{\varrho*} u^{\varrho'}\} = \sum_i u_i^{\varrho*} u_i^{\varrho'} = \delta_{\varrho \varrho'}; \quad \sum_{\varrho} u_i^{\varrho*} u_{i'}^{\varrho} = \delta_{i i'}.$$

Geht man nun zu einem durch äußere Kräfte beschleunigten Elektron über, so lassen sich die durch das Eigenfeld nicht gestörten Eigenfunktionen immer noch durch (9) darstellen, wenn man unter den  $b_{\varrho}(\mathbf{j})$  zeitlich veränderliche Größen versteht. Ist die äußere Kraft statisch

$$(11) \quad \mathfrak{F}^{(a)} = -e \operatorname{grad} V(\mathbf{x}),$$

so ergibt sich durch Einsetzen von (9) in die Diragleichung für die zeitliche Änderung der  $b_{\varrho}(\mathbf{j})$  folgendes:

$$(12) \quad \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} b_{\varrho}(\mathbf{j}) = -\frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \int dX \varphi_{\varrho}^*(\mathbf{j}, \mathbf{x}) e^{i I^{\varrho}(\mathbf{j}) \cdot \mathbf{x} t} V(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}).$$

Man wird dann von einer quasistationären Darstellung des Feldimpulses sprechen können, wenn man sich gestattet, auch in diesem Fall noch

$$(7) \quad \overline{\mathfrak{G}} = \sum_{\varrho=1,2} \int dJ |b_{\varrho}(\mathbf{j})|^2 \mathfrak{G}(\mathbf{j})$$

zu setzen. In den beiden folgenden Paragraphen werden wir die Berechtigung dieses Ansatzes ausführlich prüfen; hier soll vorerst nur gezeigt werden, daß man, von (7) ausgehend, unmittelbar zu einer Darstellung der elektromagnetischen Masse geführt wird, und zwar in vollständiger Analogie zur klassischen Theorie.

Differenziert man (7) unter Beachtung von (12) nach der Zeit, so ergibt sich offenbar:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\mathfrak{G}} &= \sum_{\varrho=1,2} \int dJ \left( b_{\varrho}^*(\mathbf{j}) \frac{d}{dt} b_{\varrho}(\mathbf{j}) + \left( \frac{d}{dt} b_{\varrho}^*(\mathbf{j}) \right) b_{\varrho}(\mathbf{j}) \right) \mathfrak{G}(\mathbf{j}) \\ &= -\frac{e}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\substack{\varrho=1,2 \\ \varrho'=1,2}} \int dJ \int dX b_{\varrho}^*(\mathbf{j}) b_{\varrho'}(\mathbf{j}') \varphi_{\varrho}^*(\mathbf{j}, \mathbf{x}) \varphi_{\varrho'}(\mathbf{j}', \mathbf{x}) \\ &\quad \cdot e^{i (I^{\varrho}(\mathbf{j}) - I^{\varrho'}(\mathbf{j}')) \cdot \mathbf{x} t} [\mathfrak{G}(\mathbf{j}) - \mathfrak{G}(\mathbf{j}')] V(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Führt man den (wegen der Änderung der  $b_{\varrho}(\mathbf{j})$  ebenfalls zeitlich veränderlichen) Mittelwert

$$\bar{\mathbf{j}} = -i \int dX \varphi^*(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x})$$

ein, und nimmt an, daß für alle im Wellenpaket vorkommenden Wellenzahlen

$$(13) \quad |\mathbf{j} - \bar{\mathbf{j}}| \ll |\bar{\mathbf{j}}|$$

ist, so gilt (wegen (8)):

$$\mathfrak{G}(\mathbf{j}) - \mathfrak{G}(\bar{\mathbf{j}}) = \left( \frac{\partial G}{\partial j} \right)_{j=\bar{j}} \cdot (\mathbf{j} - \bar{\mathbf{j}})_t + \left( \frac{G}{j} \right)_{j=\bar{j}} \cdot (\mathbf{j} - \bar{\mathbf{j}})_{tr} + \dots$$

Dabei bedeuten  $(\mathbf{j} - \bar{\mathbf{j}})_t$  bzw.  $(\mathbf{j} - \bar{\mathbf{j}})_{tr}$  die zu  $\bar{\mathbf{j}}$  parallele bzw. senkrechte Komponente von  $(\mathbf{j} - \bar{\mathbf{j}})$ .

Beachtet man noch, daß

$$\mathbf{j} \varphi(\mathbf{j}, \mathbf{x}) = -i \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{j}, \mathbf{x})$$

ist, so wird, nach partieller Integration

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d \bar{\mathfrak{G}}}{dt} = -\frac{e}{\hbar} \sum_{\substack{\varrho=1,2 \\ \varrho'=1,2}} \cdot \int dJ \int dJ' \int dX b_{\varrho}^*(\mathbf{j}) b_{\varrho'}(\bar{\mathbf{j}}) \varphi_{\varrho}^*(\mathbf{j}, \mathbf{x}) \varphi_{\varrho'}(\bar{\mathbf{j}}, \mathbf{x}) \\ \cdot e^{i(\mathcal{I}^{\varrho} - \mathcal{I}^{\varrho'})_t} \cdot \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial j} \right)_{j=\bar{j}} \cdot (\operatorname{grad} V)_t + \left( \frac{G}{j} \right)_{j=\bar{j}} \cdot (\operatorname{grad} V)_{tr} \right]. \end{array} \right.$$

Hier treten als Koeffizienten der Größen

$$\left( \frac{\partial G}{\partial j} \right)_{j=\bar{j}} \quad \text{und} \quad \left( \frac{G}{j} \right)_{j=\bar{j}}$$

gerade die Erwartungswerte der longitudinalen, bzw. transversalen äußeren Kraft auf, also ist

$$(14a) \quad \frac{d \bar{\mathfrak{G}}}{dt} = \frac{1}{\hbar} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial j} \right)_{j=\bar{j}} \cdot \bar{\mathfrak{R}}_t^{(a)} + \left( \frac{G}{j} \right)_{j=\bar{j}} \cdot \bar{\mathfrak{R}}_{tr}^{(a)} \right].$$

Zur weiteren Umformung bedarf es nun der Annahme, daß die Eigenkraft gegenüber der äußeren Kraft klein sei. Da in dieser Näherung dann auch das Glied  $-\frac{e}{\hbar} \mathfrak{A}$ , das den „Impuls“  $\mathfrak{p}$  von  $\hbar \mathbf{j}$  unterscheidet [vgl. Gl.(6)], als klein gegen  $\bar{\mathfrak{R}}^{(a)}$  angesehen werden darf, so kann man

$$(14b) \quad \frac{d \bar{\mathfrak{G}}}{dt} = \left( \frac{\partial G}{\partial j} \right)_{j=\bar{j}} \cdot \left( \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{j}} \right)_t + \left( \frac{G}{j} \right)_{j=\bar{j}} \cdot \left( \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{j}} \right)_{tr},$$

oder auch, in gleicher Näherung

$$(15) \quad \frac{d \bar{\mathfrak{G}}}{dt} = \frac{\partial G}{\partial v} \dot{\mathbf{v}}_t + \frac{G}{v} \dot{\mathbf{v}}_{tr}, \quad (v = |\mathbf{v}|)$$

setzen, wo die neue Variable  $v$  durch

$$(16) \quad v = \frac{c \bar{\mathbf{j}}}{\sqrt{|\bar{\mathbf{j}}|^2 + \mathbf{z}^2}}$$

definiert ist. [Diese Definition der „makroskopischen Geschwindigkeit“ ist natürlich ebenfalls nur im Sinne der Näherung korrekt, da

in der exakten Relation (16) statt  $\hbar \vec{j}$  der davon verschiedene Impuls  $\vec{p}$  zu stehen hätte.

Diese Resultate entsprechen nun vollständig den klassischen. Man kann also für Wellenpakete, deren Verteilung im Impulsraum der Bedingung (13) genügt, genau dann die klassischen Definitionen

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G}{\partial v} = \text{longitudinale Masse,} \\ \frac{G}{v} = \text{transversale Masse} \end{array} \right.$$

aufrechterhalten, wenn die Darstellung (7) für den Feldimpuls sich als möglich erweist.

Zu beachten ist dabei, daß in den bisherigen Rechnungen noch keinerlei Voraussetzungen über die „Schwäche“ der äußeren Kraft (11) gemacht werden mußten. Es braucht *nicht* etwa angenommen zu werden, daß die Kraft im Bereich des Wellenpakets praktisch konstant ist. Ganz andersartige (und zwar, wie sich zeigen wird, sehr einschneidende) Einschränkungen der Veränderlichkeit von  $V(\vec{x})$  werden allerdings später zur Begründung der Darstellung (7) sich als notwendig erweisen.

Es bedarf nur noch der Fall nichtstatischer äußerer Kraft einiger Worte. Hier ergibt die Rechnung an Stelle von (12) für die zeitliche Änderung der  $b_e(\vec{j})$  die Gleichung

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} b_e(\vec{j}) = - \frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \int dX \varphi_e^*(\vec{j}, \vec{x}) e^{i \vec{I}^e(\vec{j}) \cdot \vec{x} t} \cdot [V(\vec{x}, t) - (\vec{\alpha}, \vec{u}(\vec{x}, t))] \varphi_e(\vec{x}),$$

wo  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  das äußere Vektorpotential bedeutet. In Analogie zu (14) ergibt sich dann:

$$\frac{d\vec{\Theta}}{dt} = \frac{e}{\hbar} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial \vec{j}} \right)_{\vec{j}=\vec{1}} \cdot \overline{(-\text{grad } V(\vec{x}, t) + \text{grad}(\vec{\alpha}, \vec{u}(\vec{x}, t)))_i} \right. \\ \left. + \left( \frac{G}{j} \right)_{\vec{j}=\vec{1}} \cdot \overline{(-\text{grad } V(\vec{x}, t) + \text{grad}(\vec{\alpha}, \vec{u}(\vec{x}, t)))_{tr}} \right].$$

Die Koeffizienten von  $\left( \frac{\partial G}{\partial \vec{j}} \right)_{\vec{j}=\vec{1}}$  und  $\left( \frac{G}{j} \right)_{\vec{j}=\vec{1}}$  sind also nicht mehr die vollständigen Ausdrücke für die Kraft. Man kann aber sofort die Umformung vornehmen:

$$\frac{d\vec{\Theta}}{dt} = \frac{1}{\hbar} \cdot \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial \vec{j}} \right)_{\vec{j}=\vec{1}} \cdot \overline{\left( \mathfrak{R}^{(a)} + e \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}(\vec{x}, t) + e(\vec{\alpha}, \text{grad}) \vec{u}(\vec{x}, t) \right)_i} \right. \\ \left. + \left( \frac{G}{j} \right)_{\vec{j}=\vec{1}} \cdot \overline{\left( \mathfrak{R}^{(a)} + e \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}(\vec{x}, t) + e(\vec{\alpha}, \text{grad}) \vec{u}(\vec{x}, t) \right)_{tr}} \right].$$

Nun lautet aber die Bewegungsgleichung bei Streichung aller auf die Eigenkraft bezüglichen, kleinen Glieder (nullte Näherung):

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{p} = \frac{d}{dt} \left( \hbar \mathbf{j} - \frac{e}{c} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \right) = \mathfrak{R}^{(a)}$$

und da ferner  $c \alpha$  den Operator der Geschwindigkeit darstellt, erkennt man, daß nach wie vor die Koeffizienten von

$$\left( \frac{\partial G}{\partial j} \right)_{i=\bar{i}} \quad \text{und} \quad \left( \frac{G}{j} \right)_{i=\bar{i}}$$

mit der longitudinalen, bzw. transversalen Komponente von  $\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{j}}$  übereinstimmen:

$$(14b) \quad \frac{d \bar{\mathbf{G}}}{dt} = \left( \frac{\partial G}{\partial j} \right)_{i=\bar{i}} \cdot \left( \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{j}} \right)_i + \left( \frac{G}{j} \right)_{i=\bar{i}} \cdot \left( \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{j}} \right)_{tr}.$$

Daß also unser Vorgehen einer klassischen quasistationären Rechenweise auch in diesem Fall ganz korrespondiert, ist klar. Da aber die gewählte Darstellung hier den Feldimpuls als Funktion von  $\hbar \mathbf{j}$ , nicht aber von  $\mathfrak{p}$  oder der damit algebraisch zusammenhängenden makroskopischen Geschwindigkeit  $\mathfrak{v}$  liefert, läßt sich ein Übergang zu (15) nicht einfach vollziehen. Mit der hier benutzten Rechenweise gelangt man also nur bei statischer äußerer Kraft unmittelbar zur Begründung der Ausdrücke (17) für die elektromagnetischen Massen.

### § 3. Störungsrechnung

Um die Berechtigung der Darstellung (7) zu untersuchen, ist die explizite quantenelektrodynamische Berechnung des Erwartungswerts von  $\mathfrak{G}$  notwendig. Zerlegt man das elektromagnetische Feld in der folgenden bekannten Weise

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^i + \mathfrak{A}^{tr},$$

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^i + \mathfrak{E}^{tr},$$

$$\text{rot } \mathfrak{A}^i = 0,$$

$$\text{div } \mathfrak{A}^{tr} = 0,$$

$$\mathfrak{E}^i = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}^i}{\partial t},$$

$$\mathfrak{E}^{tr} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}^{tr}}{\partial t},$$

$$\mathfrak{H}^i = 0,$$

$$\mathfrak{H}^{tr} = \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}^{tr},$$

so ist bereits aus Gründen der räumlichen Symmetrie klar, daß — ebenso wie in der klassischen Theorie — zum Impuls des *Eigenfeldes* lediglich das transversale Wellenfeld einen Beitrag liefern kann<sup>1)</sup>.

1) Bei der Berechnung von  $\bar{\mathfrak{G}}$  in der hier durchgeführten Näherung kann eine Auszeichnung der Spinrichtung noch nicht auftreten. Das Verschwinden des Ausdrucks  $\frac{1}{4\pi c} \int dX [\mathfrak{E}^i, \mathfrak{H}]$  läßt sich beim Ansetzen der vollständigen quantenelektrodynamischen Gleichungen durch Vergleich der jeweiligen Beiträge von  $\mathfrak{f}$  und  $-\mathfrak{f}$  leicht verifizieren ( $\mathfrak{f}$  = Wellenzahlvektor).

Bei einer strengen Durchführung der Quantenelektrodynamik hätte man sich aber auch alle „äußersten“ Felder durch die als Operatoren definierten Potentiale beschrieben zu denken (d. h. in der Störungsrechnung im allgemeinen von einem Zustand auszugehen, in dem bereits ein Feld mit von Null verschiedenem Erwartungswert bestünde); dann könnten natürlich auch longitudinale (statische) Beiträge zum Feld von Wichtigkeit sein.

Im folgenden wird jedoch nur ein „langsam veränderliches“ äußeres Störungsfeld betrachtet werden, es müßten also anfangs doch nur kleine Wellenzahlen vertreten sein. In einem solchen Fall kann aber die Anwendung der strengen quantenelektrodynamischen Gleichungen nur die Rechnungen viel umständlicher gestalten, dagegen nichts Neues gegenüber einem Verfahren liefern, das das äußere Feld als *c-Zahl* Ortsfunktion behandelt. Es ist darum im folgenden möglich, allein mit dem einfachsten Teil der Quantenelektrodynamik, der Theorie der transversalen Wellenfelder, auszukommen.

Als Grundgleichungen können wir folgende ansetzen.

Die Hamiltonfunktion lautet<sup>1)</sup>:

$$H = W + H^0 + H^{(i)} + H^{(a)}$$

mit

$W$  = Energie des materiefreien Feldes,

$$H^0 = \hbar c \left[ \left( \vec{a}, \frac{1}{i} \operatorname{grad} \right) + \beta z \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Energie des ungestörten} \\ \text{Elektrons} \end{array} \right.$$

$$(18) \quad H^{(i)} = -e \left( \vec{a}, \mathfrak{A}^{tr} \right) = \text{innere Störung},$$

$$H^{(a)} = e (V(x, t)) - \left( \vec{a}, \mathfrak{U}(x, t) \right) = \text{äußere Störung}.$$

Für die Wellenfunktion  $\Psi$  besteht die Schrödingergleichung

$$\left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H \right) \Psi = 0.$$

Während über das *c-Zahl*feld, sowie über die auf die Orts- und Spinkoordinaten in  $\Psi$  wirkenden Operatoren kein Wort verloren zu werden braucht, spezifizieren wir noch die Wirkung des Feldoperators  $\mathfrak{U}$  (wir lassen hinfert den Index *tr* fort!), und zwar unter Einführung der bekannten „Zyklizitätsbedingung“ für das Feld:

1)  $W$  läßt sich im Falle des Punktelektrons bekanntlich als

$$\frac{1}{8\pi} \int dX (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) - \text{Nullpunktsenergie}$$

darstellen, bei der hier gewählten Art der Einführung eines Elektronenradius wird die Darstellung im Ortsraum etwas komplizierter. Vgl. dazu § 9 und (20).

$$\mathfrak{A} = \sum_{s\sigma} (A_{s\sigma} e_{s\sigma} e^{i(\mathfrak{k}_s, \mathfrak{r})} + A_{s\sigma}^\dagger e_{s\sigma} e^{-i(\mathfrak{k}_s, \mathfrak{r})}),$$

$$(e_{s\sigma}, \mathfrak{k}_s) = 0, \quad (e_{s\sigma}, e_{s'\sigma'}) = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \sigma = 1, 2,$$

$$(\mathfrak{k}_s)_i = \frac{2\pi}{L} s_i, \quad s = (s_1, s_2, s_3), (s, \text{ganz}).$$

Die  $A_{s\sigma}$  und ihre hermitesch konjugierten, die  $A_{s\sigma}^\dagger$ , wirken dann in folgender Weise:

$$(19) \quad \begin{cases} A_{s\sigma} \Omega(\dots, N, \dots) = \left(\frac{2\pi\hbar c}{L^3} \frac{g(k_s)}{k_s}\right)^{1/2} N^{1/2} \Omega(\dots, N-1, \dots), \\ k_s = |\mathfrak{k}_s|, \\ A_{s\sigma}^\dagger \Omega(\dots, N, \dots) = \left(\frac{2\pi\hbar c}{L^3} \frac{g(k_s)}{k_s}\right)^{1/2} (N+1)^{1/2} \Omega(\dots, N+1, \dots). \end{cases}$$

Hierbei sind die  $\Omega$  die durch je eine unendliche Zahlenfolge  $\dots, N, \dots$  numerierten Eigenfunktionen (Funktionale) des Operators der Feldenergie (vgl. die Fußnote 1, S. 683!):

$$(20) \quad W = \frac{L^3}{2\pi} \sum_{s\sigma} \frac{k_s^3}{g(k_s)} A_{s\sigma}^\dagger A_{s\sigma} = \sum_{s\sigma} \hbar c k_s N_s^\sigma,$$

$$(21) \quad \left( W + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Omega(\dots, N, \dots) = 0.$$

Der Operator des Feldimpulses stellt sich in Analogie zu  $W$  dar als:

$$(22) \quad \mathfrak{G} = \frac{L^3}{2\pi c} \sum_{s\sigma} \frac{\mathfrak{k}_s k_s}{g(k_s)} A_{s\sigma}^\dagger A_{s\sigma} = \sum_{s\sigma} \hbar \mathfrak{k}_s N_s^\sigma.$$

Im Zustand, der gemäß unserer Störungsrechnung in nullter Näherung realisiert sein soll, ist das innere Feld unangeregt; entwickelt man also  $\Psi$  nach den  $\Omega(\dots, N, \dots)$  von (21) einerseits, den  $\varphi_\varrho(\mathfrak{j}, \mathfrak{x})$  (vgl. S. 678) andererseits, die wir hier aber vorerst etwas abgekürzt bezeichnen wollen<sup>1)</sup>:

$$\varphi_\varrho(\mathfrak{j}, \mathfrak{x}) e^{-iI^Q(\mathfrak{j})ct} \longrightarrow \varphi_k e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} = \psi_k,$$

so muß gelten<sup>2)</sup>:

$$\Psi^{(0)} = \sum_k b_k \psi_k \Omega(\cdot 0 \cdot).$$

1) Es soll  $k$  das Indexpaar  $(\mathfrak{j}; \varrho)$  ersetzen und der einfachen Schreibweise halber zunächst als diskreter Summenindex behandelt werden. Wir denken uns die  $\psi_k$  auch vorläufig gemäß

$$\int dX \{\psi_k^* \psi_k\} = 1$$

normiert.

2) Die Schreibweise  $\Omega(\cdot 0 \cdot)$  im Gegensatz zu  $\Omega(\dots, N, \dots)$  soll andeuten, daß an den nicht angeschriebenen Stellen durchweg  $N = 0$  ist.

In der nächsten Näherung wird die innere Störung Übergänge zu Zuständen mit je einem Photon vermitteln, während die äußere auf die Feldvariablen nicht wirkt. Wir bekommen demnach

$$\Psi^{(1)} = \sum_{k \sigma \sigma} a_k^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \cdot & 1 \\ \sigma & \sigma \end{smallmatrix} \right) \psi_k \Omega \left( \begin{smallmatrix} \cdot & 1 \\ \sigma & \sigma \end{smallmatrix} \right) + \sum_k b_k^{(1)} \psi_k \Omega \left( \begin{smallmatrix} \cdot & 0 \\ \sigma & \sigma \end{smallmatrix} \right).$$

Die übliche Störungsrechnung liefert

$$(23) \quad \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} b_k^{(1)} = -e \int dX \left\{ \psi_k^* \left( V(\xi, t) - (\vec{\alpha}, \mathbf{U}(\xi, t)) \right) \sum_{k'} b_{k'}^{(0)} \psi_{k'} \right\}$$

und, unter Beachtung der Relationen (19),

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} a_k^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \cdot & 1 \\ \sigma & \sigma \end{smallmatrix} \right) = e \left( \frac{2\pi\hbar c}{L^3} \frac{g(k_s)}{k_s} \right)^{1/2} \\ \quad \cdot \int dX \left\{ \psi_k^* \left( \vec{\alpha}, \mathbf{e}_{\sigma \sigma} \right) e^{-i(\mathbf{k}_s \cdot \xi + i k_s c t)} \sum_{k'} b_{k'}^{(0)} \psi_{k'} \right\} \end{array} \right.$$

Von der nächsten Näherung werden bereits nicht alle vor kommenden Wahrscheinlichkeitsamplituden für unsere Zwecke benötigt, sondern lediglich die, welche ebenso wie die  $a^{(1)}$  zu Zuständen mit je einem Photon gehören. Diese bestimmen sich aus den folgenden Differentialgleichungen:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} c_k^{(2)} \left( \begin{smallmatrix} \cdot & 1 \\ \sigma & \sigma \end{smallmatrix} \right) \\ = -e \int dX \left\{ \psi_k^* \left( V(\xi, t) - (\vec{\alpha}, \mathbf{U}(\xi, t)) \right) \sum_{k'} a_{k'}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \cdot & 1 \\ \sigma & \sigma \end{smallmatrix} \right) \psi_{k'} \right\}, \end{array} \right.$$

und

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} d_k^{(2)} \left( \begin{smallmatrix} \cdot & 1 \\ \sigma & \sigma \end{smallmatrix} \right) = e \left( \frac{2\pi\hbar c}{L^3} \frac{g(k_s)}{k_s} \right)^{1/2} \\ \quad \cdot \int dX \left\{ \psi_k^* \left( \vec{\alpha}, \mathbf{e}_{\sigma \sigma} \right) e^{-i(\mathbf{k}_s \cdot \xi + i k_s c t)} \sum_{k'} b_{k'}^{(1)} \psi_{k'} \right\}. \end{array} \right.$$

Die Tatsache, daß dies die einzigen benötigten Wahrscheinlichkeitsamplituden sind, ist dem Umstand zu verdanken, daß der uns allein interessierende Operator  $\mathfrak{G}$ , auf das  $\Psi$  eines Zustands angewandt, in dem keine Photonen vorhanden sind, Null ergibt:

$$\mathfrak{G} \Omega \left( \cdot \ 0 \ \cdot \right) = \left( \sum \hbar k_s 0 \right) \Omega \left( \cdot \ 0 \ \cdot \right) = 0.$$

Als von Null verschiedene Beiträge zum Erwartungswert von  $\mathfrak{G}$ , die höchstens mit  $e^3$  gehen, ergeben sich also nur die folgenden:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{G}}^{(1)} + \overline{\mathfrak{G}}^{(2)} = \int dQ \left\{ \left( \sum_{k \neq \sigma} a_k^{(1)} \left( \cdot \frac{1}{s \sigma} \cdot \right) \psi_k \Omega \left( \cdot \frac{1}{s \sigma} \cdot \right) \right)^* \right. \\ \quad \cdot \overline{\mathfrak{G}} \sum_{k' \neq \sigma'} a_{k'}^{(1)} \left( \cdot \frac{1}{s' \sigma'} \cdot \right) \psi_{k'} \Omega \left( \cdot \frac{1}{s' \sigma'} \cdot \right) \Big\} \\ \quad + 2. \text{Realteil} \left( \int dQ \left\{ \left( \sum_{k \neq \sigma} (c_k^{(2)} \left( \cdot \frac{1}{s \sigma} \cdot \right) + d_k^{(2)} \left( \cdot \frac{1}{s \sigma} \cdot \right)) \psi_k \Omega \left( \cdot \frac{1}{s \sigma} \cdot \right) \right)^* \right. \right. \\ \quad \cdot \overline{\mathfrak{G}} \sum_{k' \neq \sigma'} a_{k'}^{(1)} \left( \cdot \frac{1}{s' \sigma'} \cdot \right) \psi_{k'} \Omega \left( \cdot \frac{1}{s' \sigma'} \cdot \right) \Big\} \Big) \end{array} \right.$$

Das erste Glied gibt hier den Feldimpuls  $\overline{\mathfrak{G}}^{(1)}$ , wie er ohne äußere Störung sein würde,  $\overline{\mathfrak{G}}^{(2)}$  ist die durch die äußere Störung bedingte Korrektion. Im Rest dieses Paragraphen soll uns die Ausrechnung von  $\overline{\mathfrak{G}}^{(1)}$  beschäftigen.

Die Integration von Gl. (24) ergibt sofort<sup>1)</sup>:

$$a_k^{(1)} \left( \cdot \frac{1}{s \sigma} \cdot \right) = e \left( \frac{2 \pi \hbar c}{L^3} \frac{g(k_s)}{k_s} \right)^{1/2} \sum_{k'} \frac{\int dX e^{-i(l_s, \xi) + ik_s c t} \left\{ \psi_k^* \left( \vec{a}, e_{s \sigma} \right) \psi_{k'} b_{k'}^{(0)} \right\}}{E_k - E_{k'} + \hbar c k_s}.$$

Da ferner die Relation

$$\overline{\mathfrak{G}} \Omega \left( \cdot \frac{1}{s \sigma} \cdot \right) = \hbar \mathfrak{f}_s \Omega \left( \cdot \frac{1}{s \sigma} \cdot \right)$$

gilt, bekommt man:

$$\overline{\mathfrak{G}}^{(1)} = \frac{e^2 2 \pi \hbar^2 c}{L^3} \sum_{\substack{s_1 \sigma_1 \\ k_1 k'_1 k''_1}} \frac{\mathfrak{f}_{k_1}}{k_1} g(k_s) \cdot \frac{\int dX b_{k''_1}^{(0)*} \left\{ \psi_{k''_1}^* \left( \vec{a}, e_{s \sigma} \right) \psi_{k''_1} \right\} e^{+i(l_s, \xi)} \cdot \int dX' e^{-i(l_s, \xi')} \left\{ \psi_{k''_1}^* \left( \vec{a}, e_{s \sigma} \right) \psi_k \right\} b_k^{(0)}}{(E_{k''_1} - E_{k'_1} + \hbar c k_s) \cdot (E_{k''_1} - E_k + \hbar c k_s)}.$$

Geht man nun einerseits von der symbolischen Bezeichnung  $\sum_k b_k \psi_k$  zu der exakten Darstellung mittels eines Integrals nach  $j$

1) Die durch die Differentialgleichung noch unbestimmt gelassene additive Konstante ist so festgesetzt worden, daß die  $a^{(1)}$  periodische Funktionen der Zeit werden, d. h. daß die durch die „Störungseinschaltung“ hervorgerufenen Eigenschwingungen bereits als abgeklungen betrachtet werden. Diese Festsetzung ist unbedenklich, da der Resonanznennner

$$E_k - E_{k'} + \hbar c k$$

einzig für  $k = 0$  verschwindet, und dort zwar  $a(k)$  unendlich wird, aber

$$\int dK |a(k)|^2$$

doch konvergiert.

über, beseitigt man andererseits durch den Übergang  $L \rightarrow \infty$  die Zyklizitätsbedingung in der üblichen Weise:

$$\frac{1}{L^3} \sum_s \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \int dK, \quad (dK = d\mathbf{k}_x \cdot d\mathbf{k}_y \cdot d\mathbf{k}_z),$$

so wird

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{G^{(1)}} &= \frac{e^2}{(2\pi)^3 c} \cdot \sum_{\varrho, \varrho', \varrho''} \cdot \int dJ b_{\varrho'}^{(0)*}(\mathbf{j}) b_{\varrho}^{(0)}(\mathbf{j}) \sum_{\sigma} \cdot \int dK \frac{\mathbf{k}}{k} g(k) \\ &\cdot e^{i(I^{\varrho'}(\mathbf{j}) - I^{\varrho}(\mathbf{j}))c t} \cdot \{u^{\varrho'*}(\mathbf{j}) (\overrightarrow{a}, e_{\sigma}) u^{\varrho''*}(\mathbf{j} - \mathbf{k})\} \{u^{\varrho''*}(\mathbf{j} - \mathbf{k}) (\overrightarrow{a}, e_{\sigma}) u^{\varrho}(\mathbf{j})\} \\ &\cdot (I^{\varrho''}(\mathbf{j} - \mathbf{k}) - I^{\varrho'}(\mathbf{j}) + k) (I^{\varrho''}(\mathbf{j} - \mathbf{k}) - I^{\varrho}(\mathbf{j}) + k) \end{aligned} \right.$$

Im allgemeinen Fall, in dem unter den  $b_{\varrho}^{(0)}(\mathbf{j})$  sowohl zu positiver ( $\varrho = 1, 2$ ) als auch zu negativer ( $\varrho = 3, 4$ ) Energie gehörige von Null verschiedenen sind, enthält der obige Ausdruck zeitabhängige Terme. Es ist dies offenbar ganz die gleiche Zeitabhängigkeit, die Schrödinger<sup>1)</sup> beim Strom als „Zitterbewegung“ bezeichnet und diskutiert hat. In § 8 werden wir auf diesen allgemeinen Fall kurz zu sprechen kommen, hier beschränken wir uns jedoch auf den einzigen, dem ein physikalischer Sinn zukommen dürfte, nämlich auf den, daß

$$(29) \quad b_{\varrho}^{(0)}(\mathbf{j}) = 0 \quad \text{für } \varrho = 3, 4$$

ist.

Es soll also das anfängliche Wellenpaket nur Bestandteile positiver Energie enthalten. Selbstverständlich müssen wir nach wie vor als „Zwischenzustände“ ( $\varrho''$ ) auch solche mit negativer Energie zulassen.

Zur weiteren Ausrechnung von (28) ist es bequem, die zweite Relation von (10) zu benutzen, wozu man allerdings zunächst den Summationsindex  $\varrho''$  aus dem Nenner von (28) fortschaffen muß. Dies geschieht in bekannter Weise durch Erweitern mit

$$(I^{\varrho''}(\mathbf{j} - \mathbf{k}) + I(\mathbf{j}) - k)^2$$

unter Beachtung der Relation

$$I^{\varrho}(\mathbf{j}) u^{\varrho}(\mathbf{j}) = ((\overrightarrow{a}, \mathbf{j}) + \beta \mathbf{z}) u^{\varrho}(\mathbf{j}).$$

Man erhält so, bei gleichzeitiger Summation über  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \overline{G^{(1)}} &= \frac{e^2}{(2\pi)^3 c} \cdot \sum_{\varrho, \varrho'} \cdot \int dJ b_{\varrho'}^{(0)*}(\mathbf{j}) b_{\varrho}^{(0)}(\mathbf{j}) \cdot \int \frac{dK}{k^3} g(k) \mathbf{n} \\ &\cdot \frac{\{u^{\varrho'*}(\mathbf{j}) [k^3 (1 - (\overrightarrow{a}, \mathbf{n})) - k ((\overrightarrow{a}, \mathbf{j}) - (\mathbf{j}, \mathbf{n}) (\overrightarrow{a}, \mathbf{n})) + (j^2 - (\mathbf{j}, \mathbf{n})^2)] u^{\varrho}(\mathbf{j})\}}{(I(\mathbf{j}) - (\mathbf{j}, \mathbf{n}))^2} \\ &\cdot \left( \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k} \right). \end{aligned}$$

1) E. Schrödinger, Berl. Ber. 1930, S. 418.

Es kann ferner benutzt werden, daß wegen (29) gilt:

$$(29a) \quad \{u^{\omega'*}(\mathbf{j}) \vec{\alpha} u^{\omega}(\mathbf{j})\} = \delta_{\omega*} \frac{\mathbf{j}}{I(\mathbf{j})},$$

d. h. es kann hier der Geschwindigkeitsoperator  $\vec{c} \vec{\alpha}$  durch seinen „geraden Anteil“ — die „makroskopische Geschwindigkeit“ — ersetzt werden. Es folgt dann:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathcal{G}}^{(1)} = & \frac{e^2}{(2\pi)^3 c} \sum_{\omega} \int dJ |b_{\omega}^{(0)}(\mathbf{j})|^2 \cdot \int \frac{dK}{I} \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}(K) \\ & \cdot \frac{k^2 (I - (\mathbf{j}, \mathbf{n})) + (I - k) (j^2 - (\mathbf{j}, \mathbf{n})^2)}{(I - (\mathbf{j}, \mathbf{n}))^2}. \end{aligned} \right.$$

Dieser Ausdruck hat bereits die in § 2 durch Gl. (7) vorwegengenommene Form. Unter Einführung von Polarkoordinaten mit  $\mathbf{j}$  als Achse ist die explizite Ausrechnung von  $\mathcal{G}(\mathbf{j})$  leicht. Es ergibt sich:

$$G(j) = \frac{e^2}{2\pi c} \left[ \left( \frac{1}{j^2} \log \frac{I+j}{I-j} - \frac{2}{Ij} \right) \int g(k) k^2 dk \right. \\ \left. + \left( \frac{3I^2 - j^2}{j^2} \log \frac{I+j}{I-j} - \frac{6I}{j} \right) \int g(k) \left( 1 - \frac{k}{I} \right) dk \right],$$

oder

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} G(j) = & \frac{e^2}{2\pi c} \left[ \left( \frac{1}{\beta^2} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{2}{\beta} \right) \frac{(1-\beta^2)}{\pi^2} \int g(k) k^2 dk \right. \\ & \left. + \left( \frac{3-\beta^2}{\beta^2} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{6}{\beta} \right) \left( -\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{\pi} \int g(k) k dk + \int g(k) dk \right) \right] \\ & \left( \beta = \frac{j}{I} \right) \end{aligned} \right.$$

und

$$\mathcal{G}(\mathbf{j}) = \frac{i}{j} G(j), \quad \overline{\mathcal{G}}^{(1)} = \sum_{\omega=1,2} \int dJ |b_{\omega}^{(0)}(\mathbf{j})|^2 \mathcal{G}(\mathbf{j}).$$

Im übrigen zeigt der Ausdruck (31) offenbar sehr geringe Differenzierung mit dem entsprechenden klassischen. Deuten wir, wie auf S. 675 angekündigt, die  $k$ -Integrale als Potenzen des Elektronenradius, so sehen wir, daß beim Diracelektron der Feldimpuls mit  $1/R^3$  geht, während der höchste klassische Term proportional  $1/R$  ist; im invarianten Grenzfall ist der Grad des Unendlichwerdens also hier erheblich stärker.

Es wird später erkannt werden, daß die höher divergenten Beiträge allein von den Zwischenzuständen negativer Energie herühren, und daß der Beitrag, der von positiven Zwischenzuständen allein geliefert wird, durchaus dem klassischen ähnlich ist.

## § 4. Diskussion der Berechtigung quasistationärer Rechenweise

Wir besprechen nun den Einfluß des zweiten Termes in (27), der der Wirkung der äußeren Kraft Rechnung trägt, und zwar zunächst wieder nur für den Fall, daß diese statisch ist.

Wir präzisieren (wie bereits auf S. 683 angedeutet) die Forderung, daß die äußere Kraft schwach sein soll, so, daß wir in der Fourieranalyse des Potentials  $V(\mathbf{r})$  nur kleine Wellenzahlen zulassen. Es wird die Aufgabe dieses Paragraphen sein, zu berechnen, welche Größe für diese Wellenzahlen noch maximal zugelassen werden darf.

Im Gegensatz zum obigen liefern beim *Eigenfeld* natürlich gerade die *hohen* Wellenzahlen die wesentlichen Beiträge. Zur Erleichterung der Diskussion deuten wir die durch (23) bzw. (24) (mit  $U = 0$  und  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ ) gegebenen Zeitabhängigkeiten der Wahrscheinlichkeitsamplituden durch folgende, wohl ohne weiteres verständliche, schematische Schreibweise an:

$$\frac{d}{dt} a^{(1)} \sim i \sum \dots e^{i\mu t}, \quad (\mu = c (I^e (\mathbf{j} - \mathbf{k}) - I(\mathbf{j}) + \mathbf{k})),$$

$$\frac{d}{dt} b^{(1)} \sim i \sum \dots e^{i\nu t}, \quad (\nu = c (I^{e'} (\mathbf{j}') - I(\mathbf{j}))).$$

Die Integration ergibt dann<sup>1)</sup>:

$$a^{(1)} \sim \sum \dots \frac{e^{i\mu t}}{\mu}, \quad b^{(1)} \sim \sum \dots \frac{e^{i\nu t}}{\nu}.$$

Im gleichen Schema stellen sich die durch (25) und (26) gegebenen Amplituden zweiter Näherung in der Form dar:

$$c^{(2)} \sim \sum \dots \frac{e^{i(\mu + \nu)t}}{\mu(\mu + \nu)}, \quad d^{(2)} \sim \sum \dots \frac{e^{i(\mu + \nu)t}}{\nu(\mu + \nu)},$$

— woraus aber sofort der Sinn der „quasistationären“ Rechenweise  $\S 2$  klar wird. Gestattet man sich nämlich die Annahme, daß  $\mu \gg \nu$ ,

(32) ergibt  $\mu \gg \nu$

sei, so wird in erster Näherung

$$c^{(2)} \sim 0, \quad d^{(2)} \sim \sum \dots \frac{e^{i(\mu + \nu)t}}{\mu \nu}.$$

1) Zur Festsetzung der additiven Konstanten in  $a^{(1)}$  vgl. die Fußnote auf S. 686. Damit auch in zweiter Näherung keine freien Eigenschwingungen des inneren Feldes angeregt sind, muß auch die Zeitabhängigkeit der  $b^{(1)}$  periodisch sein. Es ist leicht zu prüfen, daß auch hier das Verschwinden des Nenners für  $I(\mathbf{j}) = I(\mathbf{j}')$  zu keinen Unendlichkeiten in den hier betrachteten Erwartungswerten führt. Entsprechendes gilt weiter unten bei den  $c^{(2)}$  und  $d^{(2)}$ .

Ausgeschrieben ist in dieser Näherung, nach (26):

$$d_k^{(2)} \left( \cdot \frac{1}{\epsilon} \cdot \right) = e \left( \frac{2\pi \hbar c}{L^3} \frac{g(k_s)}{k_s} \right)^{1/2} \cdot \sum_{k'} \frac{\int dX e^{-i(f_{k_s} \cdot \vec{x}) + i k_s \epsilon t} \{ \psi_k^* (\vec{a}, \epsilon_{s0}) \psi_{k'} \} b_{k'}^{(1)}}{E_k - E_{k'} + \hbar c k_s},$$

d. h.  $d^{(2)}$  geht aus dem  $a^{(1)}$  von (24) einfach durch Ersetzen von  $b_{k'}^{(0)}$  durch  $b_{k'}^{(1)}$  hervor! Sofern hier weiter angenommen werden kann, daß alle zu negativen Energiewerten gehörigen  $b^{(1)}$  vernachlässigt werden dürfen, ergibt dann aber eine wörtliche Übertragung der früheren Rechnungen für den Feldimpuls den Ausdruck

$$(33) \quad \overline{\mathcal{G}} = \sum_{\epsilon=1,2} |b_{\epsilon}^{(0)}(\mathbf{j}) + b_{\epsilon}^{(1)}(\mathbf{j})|^2 \mathcal{G}(\mathbf{j}),$$

der innerhalb der jetzigen Näherung mit dem übereinstimmt, der in § 2 benutzt wurde.

Da ferner leicht zu sehen ist, daß alle — auch die vernachlässigten — Amplituden  $c^{(2)}$  und  $d^{(2)}$  zu  $\overline{\mathcal{G}}$  nur Beiträge mit der Zeitabhängigkeit  $e^{i\mu t}$ , nicht aber  $e^{i\nu t}$ , liefern können, so ist es, ohne die Approximation zu verfälschen, auch gestattet, den Ausdruck (33) nach der Zeit zu differenzieren. Also ist die quasistationäre Rechenweise des § 2 genau dann zulässig, wenn sich die Annahme  $\mu > \nu$  rechtfertigen läßt, und die zu negativer Energie gehörigen  $b^{(1)}$  ignoriert werden dürfen. Die Begründung der zweiten Forderung bietet keinerlei Schwierigkeiten: falls die in der Fourierzerlegung von  $V(\mathbf{x})$  vorkommenden Wellenzahlen nur klein gegen  $\mathbf{x} = \frac{mc}{\hbar}$  sind, so werden Übergänge zu negativen Niveaus in der Tat durch das äußere Feld nicht merklich induziert. Die erste Forderung läßt sich hingegen durch diese Einschränkung allein bei weitem noch nicht befriedigen. Wäre es möglich, sich durchweg auf Zustände positiver Energie zu beschränken, so wäre freilich auch die Annahme (32) leicht zu begründen. Für lauter positive Zustände stellen sich nämlich die  $\mu$  und  $\nu$  folgendermaßen dar:

$$\frac{\mu}{c} \sim \sqrt{|\mathbf{j} - \mathbf{k}|^2 + \mathbf{x}^2} - \sqrt{|\mathbf{j}|^2 + \mathbf{x}^2} + k,$$

$$\frac{\nu}{c} \sim \sqrt{|\mathbf{j} - \mathbf{k}|^2 + \mathbf{x}^2} - \sqrt{|\mathbf{j}|^2 + \mathbf{x}^2},$$

wobei  $\mathbf{k}$  eine in der Fourierzerlegung von  $V(\mathbf{x})$  vorkommende Wellenzahl bedeutet. Die Ungleichung (32) führt dann aber offenbar auf

$$\frac{|\mathbf{k}| j}{\sqrt{j^2 + \mathbf{x}^2}} \ll k.$$

Betrachtet man den langwelligsten Teil des Eigenfeldes, so ist allerdings diese Forderung nicht erfüllt. Jenen Komponenten wird man aber von vornherein schon darum keine Bedeutung beimesen können, weil in ihrem Bereich die Spaltung von innerem und äußerem Feld unberechtigt ist. (In strenger Rechnung müßten ja die Beiträge beider kohärent superponiert werden, — das äußere Feld müßte mit als  $q$ -Zahl Feld behandelt werden. Vgl. S. 683.) Alle wesentlichen Beiträge zum Feldimpuls erfassen wir andererseits schon, wenn wir uns auf die Wellenzahlen mit

$$k > k_0$$

bei festem  $k_0$  beschränken<sup>1)</sup>. Dann haben wir aber für die in der äußeren Störung vorkommenden  $\hbar$  nur die Beschränkung

$$|\hbar| \ll \frac{k_0}{j} \sqrt{j^2 + x^2}$$

zu postulieren, um die benutzte Näherung zu rechtfertigen.

Leider wird aber die Abschätzung viel ungünstiger, wenn negative Energiezustände mit in Betracht gezogen werden. Man hat dann zu berücksichtigen, daß sowohl die innere als auch die äußere Störung Übergänge ins negative Spektrum induzieren kann, so daß unter den Amplituden  $c^{(2)}$  und  $d^{(2)}$  eine Reihe von verschiedenen Typen vertreten ist.

Für unsere Abschätzung am ungünstigsten erweist sich die Betrachtung eines  $c^{(2)}$ , welches einem anfänglichen vom Eigenfeld induzierten Übergang ins negative Spektrum, und einem darauf folgenden, von  $V(x)$  bewirkten, Übergang innerhalb des negativen Spektrums entspricht. Dafür ist:

$$c_{k'}^{(2)} \sim \sum \frac{1}{(-|E_{k''}| - E_k + \hbar c k)(-|E_{k'}| - E_k + \hbar c k)}.$$

Die Beiträge dieses Gliedes zum Erwartungswert von  $\mathfrak{G}$  würden sogar noch mit einem weiteren [von dem  $a^{(1)}$  in  $\mathfrak{G}^{(2)}$ , vgl. (27), herührenden] Nenner

$$\frac{1}{(-|E_{k''}| - E_k + \hbar c k)}$$

multipliziert erscheinen, müßten aber für die quasistationäre Näherung vernachlässigt werden. Demgegenüber haben die (zu positivem Zwischenzustand gehörigen) in (33) mitgenommenen Glieder den Nenner:

$$\frac{1}{(|E_{k''}| - E_{k'} + \hbar c k)^2 (E_k - E_{k'})}.$$

1) Dabei wird es physikalisch vollkommen ausreichen, wenn wir  $k_0$  einen Wert etwa von der Größenordnung  $x$  beilegen.

Die Vernachlässigung der ersterwähnten Terme gegenüber diesen läuft daher darauf hinaus, daß selbst für die großen  $k$ :

$$(34) \quad \frac{j}{\sqrt{j^2 + x^2}} |\mathfrak{h}| \cdot k^2 \ll (\text{Min}(j, \sqrt{j^2 + x^2}))^3$$

angenommen wird!

Erstreckt man (im invarianten Grenzfall) die Integration über  $k$  bis ins Unendliche, so ist diese Forderung schlechterdings unerfüllbar, aber selbst wenn man die  $k$ -Integration etwa beim reziproken klassischen Elektronenradius abbricht, wo<sup>1)</sup> aus (34) die Ungleichung

$$|\mathfrak{h}| \ll x \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 = \frac{x}{(137)^2}$$

wird, bedeutet dies eine ganz sinnlos starke Forderung bezüglich der Schwäche, oder der räumlichen Variabilität der äußeren Kraft.

Im invarianten Grenzfall divergieren die vernachlässigten Integrale nach (34) mit dem Faktor  $k^2$  stärker als die eben damit verglichenen Glieder. Nimmt man zum Vergleich die stärker divergierenden, zu *negativen* Zwischenzuständen gehörenden Terme in (30), so findet man immer noch, daß der Divergenzgrad des Vernachlässigten dem des Ausdrucks (31) *gleich* ist, d. h. es enthält den Elektronenradius auch in der Potenz  $1/R^3$ !

Die Abspaltung eines quasistationären Terms bei der *Differentiation* von  $\mathfrak{G}$  hat aber immerhin doch einen größeren Sinn, als zunächst erscheinen könnte. Die Ungleichungen (32) und (34) zeigen, daß die Zerspaltung auf eine Entwicklung nach Potenzen von

$$\mathfrak{h} \frac{j}{\sqrt{j^2 + x^2}}$$

hinausläuft. Dies trifft auch noch zu, wenn man die hier nicht explizit betrachteten vernachlässigten Terme mitberücksichtigt. Nach den Rechnungen des § 2 ergibt das mitgenommene Hauptglied bei zeitlicher Differentiation einen der Kraft

$$\mathfrak{R}_i^{(a)} = -e \frac{\partial}{\partial x_i} V(\xi)$$

proportionalen Term. Da nun in den nächsten Termen ein weiterer Faktor

$$\mathfrak{h} \frac{j}{\sqrt{j^2 + x^2}} = \frac{j}{\sqrt{j^2 + x^2}} (\mathfrak{j} - \mathfrak{j}')$$

(im Sinne der damaligen Bezeichnungen) auftritt, so ist qualitativ leicht zu erkennen, daß diese Glieder zu

$$\frac{cj}{\sqrt{j^2 + x^2}} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathfrak{R}^{(a)} = v \frac{\partial}{\partial x_k} \mathfrak{R}^{(a)}$$

1) Falls  $j \lesssim x$  ist.

proportional sind, was aber qualitativ identifiziert werden kann mit:

$$\frac{d \mathfrak{K}}{dt} \sim m \ddot{x}.$$

Den vernachlässigten Gliedern kommt also jedenfalls nicht der Charakter von Trägheitstermen zu, sie stellen vielmehr eher ein Analogon zur *Strahlungsdämpfung* dar. Die in diesem Abschnitt gemachten Abschätzungen besagen also im Grunde nur, daß eine äußere Kraft am Diracelektron unendlich große Strahlungsreaktionen hervorruft. Zur Berechnung einer elektromagnetischen Masse kann aber konsequenterweise stets nur der „quasistationäre“ Term benutzt werden, da er allein proportional mit  $\ddot{x}$  geht. Beim Diracelektron stellt allerdings die Entwicklung der Eigenkraft nach wachsenden Ableitungen  $\ddot{x}$ ,  $\dddot{x}$ , ... der Koordinate *nicht* zugleich eine Entwicklung nach wachsenden Potenzen von  $R$  dar. Die quasistationäre Näherung läßt sich also hier (im Gegensatz zur klassischen Theorie) *nicht* etwa dadurch rechtfertigen, daß sie den *größten* Term der Eigenkraft gäbe; immerhin scheint sie insofern sinnvoll, als sie gerade den zu  $\ddot{x}$  proportionalen Term, d. h. die *Trägheitskraft*, zu isolieren und damit eine elektromagnetische Masse zu definieren gestattet.

Wir bemerken schließlich noch, daß an den Überlegungen dieses Paragraphen nichts wesentliches geändert wird, wenn man eine nicht-statische äußere Störung voraussetzt.

Natürlich enthalten dann die  $v$  additiv die in den Potentialen  $V(x, t)$  und  $U(x, t)$  auftretenden Frequenzen. Diese müssen ebenfalls überaus klein sein, wenn man der quasistationären Rechenweise Sinn zusprechen will. Unter den entsprechenden Einschränkungen folgt dann genau wie vorher die behauptete Darstellung (7) für den Feldimpuls.

### § 5. Über den Zusammenhang von „elektromagnetischer Masse“ und Selbstenergie

Die bisher durchgeführten Rechnungen haben zwar in erster Linie zu dem Resultat geführt, daß die Anwendung der Vorstellung einer elektromagnetischen Masse auf das Diracelektron etwas bedenklich ist, es konnte aber formal ganz zwanglos beantwortet werden, was als Ausdruck für diese Masse in Frage kommt; maßgebend dafür ist ganz eindeutig der Erwartungswert des Operators  $\mathfrak{G}$ , für den [bis auf Einzelheiten, die der Anm. 1 S. 678 entsprechen, und hier übergangen werden mögen!] die Relationen gelten:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{4\pi c} \int dX[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}], \quad -\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = e \left( \mathfrak{E} + [\vec{\alpha}, \mathfrak{H}] \right).$$

V  
2  
2  
1  
9  
3  
5  
XUM

Es fällt auf, daß der für den Erwartungswert von  $\mathfrak{G}$  berechnete Ausdruck sehr geringe Ähnlichkeit mit dem Wallerschen Selbstenergiewert (1) hat. Während nämlich letzterer nur Terme mit  $1/R$  und  $1/R^2$  enthält, trat in unserem Ausdruck (31) dazu noch ein zu  $1/R^3$  proportionales Glied auf.

Tatsächlich besteht auch zwischen den beiden Ausdrücken kaum irgendwelcher Zusammenhang, wie nun kurz erläutert werden möge<sup>1)</sup>. Die Energiegröße, die zu  $\mathfrak{G}$  analog ist, ist keineswegs die Wallersche Selbstenergie, sondern der früher mit  $W$  bezeichnete Operator, der im wesentlichen gegeben ist durch

$$W = \frac{1}{8\pi} \cdot \int dX (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2),$$

und dessen Änderung die an der Materie geleistete Arbeit angibt:

$$(35) \quad -\frac{d}{dt} W = ce(\vec{a}, \mathfrak{E}).$$

Berechnet man den Erwartungswert von  $W$  ganz analog wie früher den von  $\mathfrak{G}$ , so ergibt sich (unter Einschluß des statischen Terms  $e^2/R$ ):

$$\begin{aligned} \overline{W}^{(1)} = & \frac{e^2}{2\pi} \left[ \frac{1-\beta^2}{x^2\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \int g(k) k^2 dk - \left( \frac{2}{\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 4 \right) \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{x} \right. \\ & \cdot \int g(k) k dk + \left. \left( \frac{2}{\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 2 \right) \int g(k) dk \right], \end{aligned}$$

also ebenfalls ein Ausdruck, der Terme mit  $1/R^3$  enthält, und der Wallerschen Selbstenergie unähnlich ist.

Die Selbstenergie ist bekanntlich definiert als die bei Einschaltung der Eigenfeldstörung sich ergebende Verschiebung des Energieeigenwerts des *Gesamtsystems*, also als:

$$\overline{E} = \text{Erw}(W + H_{\text{mat}} - e\hbar\mathcal{V}\vec{j}^{(0)2} + \mathfrak{x}^2)$$

mit

$$H_{\text{mat}} = \frac{\hbar c}{i} (\vec{a}, \text{grad}) + \beta m c^2 - e(\vec{a}, \mathfrak{A}).$$

Im invarianten Grenzfall faßt daher  $\overline{E}^{(1)}$  alle unendlichen Energiesterme zusammen. Will man die analoge Impulsgröße aufstellen, so lautet jene

$$\overline{\mathfrak{P}} = \text{Erw}(\mathfrak{G} + \mathfrak{p} - \hbar\vec{j}^{(0)}),$$

mit

$$\mathfrak{p} = \frac{\hbar}{i} \text{grad} - \frac{e}{c} \mathfrak{A}.$$

1) Wir beschränken uns in diesem Paragraphen auf den Fall der ebenen Welle ( $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}^{(0)}$ ).

Ihre Berechnung bietet ebenfalls keine Schwierigkeiten und ergibt in erster Näherung:

$$c \overline{P^{(1)}} = \frac{e^3}{2\pi} \left( \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{2}{\beta} \right) \cdot \left( -\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{\pi} \int g(k) k dk + 2 \int g(k) dk \right); \quad (\overline{P^{(1)}} = |\overline{\mathfrak{P}^{(1)}}|),$$

was eine viel engere Verwandtschaft zur Selbstenergie darstellt als (31).

Daß die letzteren Ausdrücke mit einer elektromagnetischen Masse wenig zu tun haben, wird durch eine Betrachtung der *Bewegungsgleichung* deutlich. Bei „ausgeschalteter“ Eigenfeldstörung lautet diese zunächst

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{p}^{(0)} = \mathfrak{R}^{(a)}$$

wo  $\mathfrak{p}^{(0)}$  das  $\hbar$ -fache des auf S. 679 definierten Ausdrucks  $\mathfrak{j}$  bedeutet. Schalten wir nun die Störung ein, so wird nicht nur ein Eigenfeld aufgebaut, das eine (rechts hinzutretende) Eigenkraft liefert, sondern es wird auch der linksstehende *materielle* Impuls des Elektrons geändert, mit anderen Worten, das Elektron wird *beschleunigt*. Dieser Term, der *links* hinzutritt, ist gerade

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{p}^{(1)} = \frac{d}{dt} (\overline{\mathfrak{P}^{(1)}} - \overline{\mathfrak{G}^{(1)}}).$$

Die in § 2 durchgeführte Parallele zur klassischen Theorie macht wohl deutlich, daß dieser Zusatz für die *elektromagnetische* Masse ohne Belang ist; klassisch würde bei Nullsetzen der mechanischen Masse (vgl. Anm. 1, S. 677)  $\mathfrak{p}^{(1)}$  gleichzeitig mit  $\mathfrak{p}^{(0)}$  verschwinden. Beide Zusätze erster Näherung, der rechts- wie der linksstehende, haben in der Entwicklung nach  $R$  das gleiche Anfangsglied  $C \cdot \frac{e^3}{R^3}$ , wie es ja sein muß, damit die Bewegungsgleichung auch im invarianten Grenzfall  $R = 0$  ihre Gültigkeit behält (wobei sie allerdings ihren physikalischen Sinn verliert).

Für das Studium des Verhaltens im invarianten Grenzfall ist der Ausdruck  $\mathfrak{P}^{(1)}$  insofern zweifellos der wichtigere, als in ihm alle divergenten Glieder zusammengefaßt erscheinen.

Der Übersichtlichkeit halber mögen hier noch die Entwicklungen der verschiedenen betrachteten Größen für kleine Geschwindigkeiten ( $\beta \ll 1$ ) angegeben werden. Terme mit  $\beta^3$  sind bereits vernachlässigt.

$$\begin{aligned}\bar{E}^{(1)} &= \frac{e^2}{2\pi} \left[ \frac{2+\beta^2}{\pi} \int g(k) k dk + \left(2 - \frac{4}{3}\beta^2\right) \int g(k) dk \right], \\ c\bar{P}^{(1)} &= \frac{e^2}{2\pi} \left[ \frac{4}{3} \frac{\beta}{\pi} \int g(k) k dk - \frac{8}{3} \beta \int g(k) dk \right], \\ \bar{W}^{(1)} &= \frac{e^2}{2\pi} \left[ \frac{2 - \frac{4}{3}\beta^2}{\pi^2} \int g(k) k^2 dk - \frac{4}{3} \frac{\beta^2}{\pi} \int g(k) k dk \right. \\ &\quad \left. + \left(2 + \frac{4}{3}\beta^2\right) \int g(k) dk \right], \\ c\bar{G}^{(1)} &= \frac{e^2}{2\pi} \left[ \frac{2}{3} \frac{\beta}{\pi^2} \int g(k) k^2 dk \right].\end{aligned}$$

### § 6. „Löchertheorie“

Die bisherigen Überlegungen benutzten die Theorie des Dirac-elektrons in ihrer ursprünglichen Form, mit *unbesetzten* negativen Energieniveaus. Nun ist zwar bekannt<sup>1)</sup>, daß auch die Vorstellung, die negativen Zustände seien normalerweise gemäß dem Pauli-prinzip mit je einem Elektron besetzt, die Selbstenergieschwierigkeiten nicht zu beseitigen vermag, trotzdem erscheint es von Interesse, die hier durchgeführten Überlegungen auf diese sogenannte „Löchertheorie“ auszudehnen, besonders im Hinblick darauf, daß das im § 4 erläuterte Versagen der quasistationären Rechenweise allein den negativen Energiezuständen zu verdanken ist. Leider erschien eine quantitative Diskussion der Verhältnisse wegen der der Löchertheorie selbst noch anhaftenden Schwierigkeiten unmöglich, qualitative Betrachtungen geben jedoch bereits leicht zu erkennen, daß gerade bezüglich der Überlegungen des § 4 hier die Sachlage erheblich günstiger sein wird.

Von den eigentlichen Schwierigkeiten noch ganz unberührt verläuft die Berechnung des Feldimpulses im kraftfreien Fall, die im engsten Anschluß an die eben zitierte Arbeit von Weisskopf ausgeführt werden kann. Dies soll den Inhalt dieses Paragraphen bilden.

Diese Berechnung ist darum einfach, weil wir noch die Näherung freier Elektronen benutzen können. Der Formalismus der Löchertheorie läuft dann darauf hinaus, daß für einen Operator  $F$  der Erwartungswert berechnet werden kann als

$$(36) \quad \bar{F}_L = \bar{F}_{\text{Vak.}+1} - \bar{F}_{\text{Vak.}},$$

d. h. daß der in der üblichen Weise quantenmechanisch berechnete Erwartungswert des „Vakuum“-Zustandes vom Erwartungswert im

1) V. Weisskopf, Ztschr. f. Phys. **89**, S. 27. 1934; Berichtigung: Ztschr. f. Phys. **90**, S. 817. 1934.

Zustand, in dem überdies noch ein Elektron vorhanden ist, subtrahiert werden muß, um eine mit der Erfahrung vergleichbare Größe zu erhalten.

Die Besetzung der negativen Niveaus bewirkt offenbar, daß in unserer Näherung der Störungsrechnung keine Zwischenzustände negativer Energie auftreten können, der löchertheoretische Erwartungswert — etwa des hier immer betrachteten Feldimpulses<sup>1)</sup> — besteht jedoch nicht allein aus jenem Teil des früher berechneten, den die positiven Zwischenzustände bedingen, es kommt vielmehr noch eine Korrektion hinzu: im Vergleich zum Vakuumzustand sind nämlich die Elektronen in den negativen Niveaus beim „Einelektronenproblem“ in ihrer Bewegungsfreiheit eingeengt, da das Pauli-prinzip ihnen nun die Übergänge auf das besetzte positive Niveau verbietet. Dies äußert sich in den Erwartungswerten (36) als ein Zusatz, den wir künftig als „löchertheoretische Ergänzung“ bezeichnen wollen. Ihrer Struktur nach ist diese mit dem erstgenannten Term im Erwartungswert sehr nahe verwandt.

Um das Gesagte in Formeln zu kleiden, benutzen wir den Formalismus der „gequantelten Wellen“ nach Jordan und Wigner<sup>2)</sup>. Wir stellen dafür die Grundgleichungen zusammen.

Es wird aus den Lösungen (9) der Diracgleichung der Operator

$$\psi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_e \int dJ \mathbf{a}_e(j) \varphi_e(j, \xi)$$

sowie sein hermitesch konjugierter

$$\psi^\dagger(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_e \int dJ \mathbf{a}_e^\dagger(j) \varphi_e^*(j, \xi)$$

gebildet, wobei die Matrizen  $\mathbf{a}_e(j)$  und  $\mathbf{a}_e^\dagger(j)$  so gewählt sind, daß die Relationen bestehen:

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_i^\dagger(\xi) \psi_{i'}(\xi) + \psi_{i'}^\dagger(\xi) \psi_i(\xi) = \delta_{ii'} \delta(\xi - \xi'); \\ \psi_i(\xi) \psi_{i'}(\xi) + \psi_{i'}(\xi) \psi_i(\xi) = 0; \\ \psi_i^\dagger(\xi) \psi_{i'}^\dagger(\xi) + \psi_{i'}^\dagger(\xi) \psi_i^\dagger(\xi) = 0 \end{array} \right.$$

$(\psi_1, \dots, \psi_4)$  = Komponenten der einzelnen Eigenfunktionen  $\psi$ .

1) Im Spezialfall des Feldimpulses ist natürlich der Vakuumerwartungswert aus Gründen der räumlichen Symmetrie Null.

2) P. Jordan u. F. Wigner, Ztschr. f. Phys. 47. S. 631. 1928; vgl. auch W. Heisenberg u. W. Pauli, Ztschr. f. Phys., 56. S. 1. 1929.

V  
2  
2  
1  
9  
3  
5  
XUM

Die Hamiltonfunktion muß in der Form geschrieben werden:

$$H = W + \int dX \psi^\dagger \left( \frac{\hbar c}{i} (\vec{a}, \text{grad}) + \beta m c^2 \right) \psi + H^{(i)},$$

$$H^{(i)} = -e \int dX \psi^\dagger (\vec{a}, \mathfrak{A}) \psi,$$

und die Wellenfunktion, die der Schrödinger-Gleichung

$$\left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H \right) \Psi = 0$$

genügt, enthält nun als Argumente einerseits die Photonenzahlen,  $N$ , wie bisher, andererseits entsprechende Besetzungszahlen,  $M$ , für die Elektronenzustände, die aber, im Sinne des Pauli-Prinzips, nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Feldgrößen, die am allgemeinen Aufpunkt zu nehmen sind, werden genau durch die bisherigen Operatoren dargestellt, dagegen sind solche, die am „Teilchenort“ genommen werden müssen (und dann stets mit der Ladung multipliziert auftreten), nun durch Operatoren der folgenden Art darzustellen:

$$e\tilde{\mathfrak{F}} = e \int dX \psi^\dagger \tilde{\mathfrak{F}}(\vec{x}) \psi.$$

Genau wie für das Lichtfeld, erweist es sich hier als zweckmäßig, für das Feld der Materiewellen die Zyklizitätsbedingung einzuführen:

$$\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}_r, \quad r = (r_1, r_r, r_s), \quad (r_i \text{ ganz}), \quad (j_r)_i = \frac{2\pi r_i}{L}.$$

Der  $\psi$ -Operator läßt sich dann als Summe schreiben:

$$\psi = \sum_{r_\varrho} \mathbf{a}_{r_\varrho} e^{+i(j_r \cdot \vec{r})} u_{r_\varrho},$$

ebenso

$$\psi^\dagger = \sum_{r_\varrho} \mathbf{a}_{r_\varrho}^\dagger e^{-i(j_r \cdot \vec{r})} u_{r_\varrho}^*.$$

Es bekommt dann die Hamiltonfunktion die Gestalt

$$H = \frac{L^3}{2\pi} \sum_{s_\sigma} \frac{k_s^3}{g(k_s)} A_{s_\sigma}^\dagger A_{s_\sigma} + L^3 \sum_{r_\varrho} \hbar c \mathbf{a}_{r_\varrho}^\dagger \mathbf{a}_{r_\varrho} I^0(j_r) + H^{(i)}$$

mit

$$H^{(i)} = -e L^3 \sum_{s_\sigma, r_\varrho, r'_\varrho} \left[ \mathbf{a}_{r_\varrho}^\dagger \left\{ u_{r_\varrho}^* (\vec{a}, e_{s_\sigma}) u_{(r-s)_\varrho'} \right\} \mathbf{a}_{(r-s)_\varrho'} A_{s_\sigma} \right. \\ \left. + \mathbf{a}_{(r-s)_\varrho'}^\dagger \left\{ u_{(r-s)_\varrho'}^* (\vec{a}, e_{s_\sigma}) u_{r_\varrho} \right\} \mathbf{a}_{r_\varrho} A_{s_\sigma}^\dagger \right].$$

Dem System der Eigenfunktionen  $\Omega(\dots, N, \dots)$  (S. 684) entspricht hier ein zweites solches System  $O(\dots, M, \dots)$ , das von den Elektronenzahlen abhängt. Darauf wirken die  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{a}^\dagger$  folgendermaßen:

$$\mathbf{a}_{r_\ell} O \left( \dots, \frac{M}{r_\ell}, \dots \right) = \varepsilon \left( \frac{M}{L^s} \right)^{1/2} O \left( \dots, 1 - \frac{M}{r_\ell}, \dots \right),$$

$$\mathbf{a}_{r_\ell}^\dagger O \left( \dots, \frac{M}{r_\ell}, \dots \right) = \varepsilon \left( \frac{1-M}{L^s} \right)^{1/2} O \left( \dots, 1 - \frac{M}{r_\ell}, \dots \right).$$

Es ist hierbei  $\varepsilon$  entweder  $+1$  oder  $-1$ , und zwar wird die Regel, nach der das Vorzeichen zu wählen ist, im folgenden ohne Belang sein. Es genügt zu wissen, daß die Identitäten

$$\mathbf{a}_{r_\ell}^\dagger \mathbf{a}_{r' \ell'} + \mathbf{a}_{r' \ell'}^\dagger \mathbf{a}_{r_\ell} = \delta_{r r'} \delta_{\ell \ell'},$$

$$\mathbf{a}_{r_\ell} \mathbf{a}_{r' \ell'} + \mathbf{a}_{r' \ell'} \mathbf{a}_{r_\ell} = \mathbf{a}_{r_\ell}^\dagger \mathbf{a}_{r' \ell'}^\dagger + \mathbf{a}_{r' \ell'}^\dagger \mathbf{a}_{r_\ell}^\dagger = 0$$

dadurch gewährleistet sind, aus denen im Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  (37) folgt.

Nach dieser Zusammenstellung können wir mit der störungsmäßigen Berechnung von  $\Omega^{(1)}$  beginnen. Wir beschränken uns dabei in der ausführlichen Rechnung auf den Fall, daß das Elektron durch eine ebene Welle beschrieben wird: es ist nach dem Früheren klar, wie sich die Gleichungen für den allgemeineren Fall eines Wellenpaketes aus den spezielleren ergeben, und im Formalismus würde die Verallgemeinerung nur bedeuten, daß man in der nullten Näherung nicht von einer einzigen Eigenfunktion  $\Omega O$  auszugehen hätte, sondern von einer Linearkombination solcher. Diese an sich triviale Verallgemeinerung wäre beim Aufschreiben der ohnehin umfangreichen Gleichungen jedoch ziemlich lästig, so daß wir nur in der Endformel wieder zum allgemeinen Wellenpaket zurückkehren werden.

Wir setzen zunächst allgemein an

$$\Psi = \sum_{\substack{(\dots, N, \dots; \\ \dots, M, \dots)}} a(\dots, N, \dots; \dots, M, \dots) \Omega(\dots, N, \dots) O(\dots, M, \dots),$$

und entwickeln:

$$a = a^{(0)} + a^{(1)} + \dots$$

In nullter Näherung sei

$$\Psi = \Omega(0, 0) O(0, M_{r_\ell}^0, 0),$$

wobei die  $0, M_{r_\ell}^0, 0$  eine gegebene Zahlenfolge sein sollen, bestehend aus Zahlen Null und Eins.

Durch Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung erhält man leicht

$$\begin{aligned} & a^{(1)} \left( \cdot 1 \cdot ; \dots \left( 1 - M_{r_\ell}^0 \right) \dots \left( 1 - M_{(r-s)\ell'}^0 \right) \dots \right) \\ &= -\frac{e}{\hbar c} \left( \frac{2\pi\hbar c}{L^s} \frac{g(k_s)}{k_s} \right)^{1/2} \varepsilon \varepsilon' \left\{ u_{(r-s)\ell'}^* \left( \vec{a}, e_{s\ell} \right) u_{r_\ell} \right\} \\ & \cdot \frac{\left( 1 - M_{(r-s)\ell'}^0 \right)^{1/2} M_{r_\ell}^0}{\left( 1 - 2M_{r_\ell}^0 \right) I^0(i_r) + \left( 1 - 2M_{(r-s)\ell'}^0 \right) I^{0'}(i_{r-s}) + k_s} e^i \left( \left( 1 - 2M_{r_\ell}^0 \right) I^0(i_r) + \left( 1 - 2M_{(r-s)\ell'}^0 \right) I^{0'}(i_{r-s}) + k_s \right) \end{aligned}$$

V  
2  
2  
1  
9  
3  
5  
XUM

während alle anderen Wahrscheinlichkeitsamplituden erster Näherung verschwinden. Hiermit lässt sich sofort  $\overline{G}^{(1)}$  berechnen, das nach wie vor durch (22) gegeben ist:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{G}_L^{(1)} = & \frac{2\pi e^2}{c L^3} \sum_{\substack{r, \varrho, \varrho', \\ s, \sigma}} M_{r\varrho}^0 (1 - M_{(r-s)\varrho'}^0) \frac{\mathbf{k}_s}{k_s} g(k_s) \\ & \cdot \frac{\left| \left\{ u_{r\varrho}^* (\vec{\alpha}, e_{s\sigma}) u_{(r-s)\varrho'} \right\} \left\{ u_{(r-s)\varrho'}^* (\vec{\alpha}, e_{s\sigma}) u_{r\varrho} \right\} \right|^2}{(I^{\varrho'}(i_{r-s}) - I^{\varrho}(i_r) + k_s)^2} \end{aligned} \right.$$

Wir haben nun die beiden folgenden Zustände zu vergleichen:

$$\text{Vakuum: } M_{r\varrho}^0 = \begin{cases} 0 & \text{für } \varrho = 1, 2 \\ 1 & \text{, } \varrho = 3, 4 \end{cases}$$

$$\text{Einelektronenproblem: } M_{r\varrho}^0 = \begin{cases} \delta_{\varrho \varrho_0} \delta_{rs} & \text{für } \varrho = 1, 2 (\varrho_0 = 1 \text{ od. } 2) \\ 1 & \text{, } \varrho = 3, 4 \end{cases}$$

Die Differenz der Erwartungswerte in beiden Fällen ist, wie sich sofort durch Einsetzen in (38) ergibt:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{G}_L^{(1)} = & \frac{2\pi e^2}{c L^3} \left[ \sum_{\substack{\varrho'=1,2 \\ s, \sigma}} \frac{\mathbf{k}_s}{k_s} g(k_s) \frac{\left| \left\{ u_{r_0 \varrho_0}^* (\vec{\alpha}, e_{s\sigma}) u_{(r_0-s)\varrho'} \right\} \right|^2}{(I(i_{r_0-s}) - I(i_{r_0}) + k_s)^2} \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{\varrho'=3,4 \\ s, \sigma}} \frac{\mathbf{k}_s}{k_s} g(k_s) \frac{\left| \left\{ u_{r_0 \varrho_0}^* (\vec{\alpha}, e_{s\sigma}) u_{(r_0+s)\varrho'} \right\} \right|^2}{(I(i_{r_0}) + I(i_{r_0+s}) + k_s)^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Der erste Summand von (39) ist, wie behauptet, die zu positiven Zwischenzuständen gehörende Hälfte von (30), der zweite ist gerade die „löchertheoretische Ergänzung“. Man kann letztere noch durch die Substitution  $s \rightarrow -s$  und Ausnutzung der Freiheit in der Wahl der Polarisationsrichtungen  $e_{s\sigma}$  umformen in:

$$+ \frac{2\pi e^2}{c L^3} \sum_{\substack{\varrho'=3,4 \\ s, \sigma}} \frac{\mathbf{k}_s}{k_s} g(k_s) \frac{\left| \left\{ u_{r_0 \varrho_0}^* (\vec{\alpha}, e_{s\sigma}) u_{r_0-s, \varrho'} \right\} \right|^2}{(I(i_{r_0-s}) + I(i_{r_0}) + k_s)^2}.$$

Geht man nun im Grenzübergang  $L \rightarrow \infty$  wieder von Summen zu Integralen über, so wird aus (39):

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{G}_L^{(1)} = & \frac{e^2}{(2\pi)^3 c} \sum_{\sigma} \int dK \frac{\mathbf{k}}{k} g(k) \left[ \sum_{\varrho'=1,2} \frac{\left| \left\{ u_{r_0 \varrho_0}^* (j_0) (\vec{\alpha}, e_{s\sigma}) u_{r_0-s, \varrho'} (j_0 - \mathbf{k}) \right\} \right|^2}{(I(j - \mathbf{k}) - I(j) + k)^2} \right. \\ & \left. + \sum_{\varrho'=3,4} \frac{\left| \left\{ u_{r_0 \varrho_0}^* (j_0) (\vec{\alpha}, e_{s\sigma}) u_{r_0+s, \varrho'} (j_0 - \mathbf{k}) \right\} \right|^2}{(I(j - \mathbf{k}) + I(j) + k)^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Wie die angekündigte Verallgemeinerung des Resultats auf ein beliebiges Wellenpaket zu geschehen hat, ist klar. Wie früher, wird im allgemeinen Fall

$$\mathfrak{G}_L^{(1)} = \sum_{\varrho=1,2} \int dJ |b_{\varrho}^{(0)}(\mathbf{j})|^2 \mathfrak{G}_L(\mathbf{j}),$$

wobei nun der Ausdruck (40) mit  $\mathfrak{G}_L(\mathbf{j})$  bezeichnet worden ist. Die explizite Ausrechnung von (40) geschieht auf ähnlichem Wege wie im § 3. Hier ist allerdings eine Summation über alle vier Werte von  $\varrho'$  nicht ohne weiteres möglich; man kann sie aber bekanntlich erzwingen durch Benutzung der Relationen

$$\sum_{\varrho=1,2} \dots u^{\varrho} \dots = \sum_{\varrho=1}^4 \dots \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(\vec{\alpha}, \mathbf{j}) + \beta \mathbf{x}}{\sqrt{j^2 + \mathbf{x}^2}} \right) u^{\varrho} \dots$$

$$\sum_{\varrho=3,4} \dots u^{\varrho} \dots = \sum_{\varrho=1}^4 \dots \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(\vec{\alpha}, \mathbf{j}) + \beta \mathbf{x}}{\sqrt{j^2 + \mathbf{x}^2}} \right) u^{\varrho} \dots$$

Man kann so die beiden Summanden von (40) einzeln berechnen. Außerdem ist es zur Probe angenehm, den hier gerade nicht benötigten Teil von (30), der von den negativen Zwischenzuständen herrührt, mitzuberechnen. Wir bezeichnen die beiden Bestandteile von  $\mathfrak{G}(\mathbf{j})$ , (30) als  $\mathfrak{G}^+(\mathbf{j})$  und  $\mathfrak{G}^-(\mathbf{j})$ , die löchertheoretische Ergänzung als  $\mathfrak{G}'(\mathbf{j})$ , so daß

$$\mathfrak{G}(\mathbf{j}) = \mathfrak{G}^+(\mathbf{j}) + \mathfrak{G}^-(\mathbf{j}) = \frac{i}{j} (G^+(j) + G^-(j)),$$

$$\mathfrak{G}_L(\mathbf{j}) = \mathfrak{G}^+(\mathbf{j}) + \mathfrak{G}'(\mathbf{j}) = \frac{i}{j} (G^+(j) + G'(j))$$

gilt. Dann ergibt sich

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} G^{\pm}(j) = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \frac{1}{I(j)} \cdot \int \frac{dK}{I(j-\mathbf{k})} g(k) \\ \quad \cdot n \cdot \frac{I(j)(I(j-\mathbf{k}) \mp I(j)) \pm (\mathbf{k}, \mathbf{j}) \pm j^2 \mp (j, n)^2}{(\pm I(j-\mathbf{k}) - I(j) + k)^2}, \\ \text{und} \\ G'(j) = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \frac{1}{I(j)} \cdot \int \frac{dK}{I(j-\mathbf{k})} g(k) \\ \quad \cdot n \cdot \frac{I(j)(I(j-\mathbf{k}) + I(j)) - (\mathbf{k}, \mathbf{j})^2 - j^2 + (j, n)^2}{(I(j-\mathbf{k}) + I(j) + k)^2}. \end{array} \right.$$

Nach längerer, elementarer Rechnung folgt daraus:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} G^{\pm}(j) = \frac{e^2}{2\pi c} \int dk g(k) \left[ -\frac{1}{\beta} \left( 3 \left( 1 - \frac{k}{I} \right) + \frac{k^2}{I^2} \right) \right. \\ \quad + \left( \frac{3 - \beta^2}{\beta^2} \left( 1 - \frac{k}{I} \right) + \frac{k^2}{I^2} \frac{1}{\beta^2} \right) \cdot \log \frac{k - I \pm I^+}{k - I \pm I^-} \\ \quad \pm \frac{I^+ - I^-}{I \beta^2} \left( \frac{7}{30} \frac{k^2}{I^2} - \frac{k}{I} + \frac{79}{30} - \frac{2}{5} \beta^2 - \frac{I}{2k} - \frac{1}{10} \frac{I^2}{k^2} \right) \\ \quad \left. \pm \frac{I^+ + I^-}{I \beta} \left( \frac{4}{15} \frac{k}{I} - 1 + \frac{1}{10} \frac{I}{k} \right) \right], \end{array} \right.$$

und

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} G'(j) = \frac{e^2}{2\pi c} \int dk g(k) \left[ + \frac{1}{\beta} \left( 3 \left( 1 + \frac{k}{I} \right) + \frac{k^2}{I^2} \right) \right. \\ \quad + \left( \frac{3 - \beta^2}{\beta^2} \left( 1 + \frac{k}{I} \right) + \frac{k^2}{I^2} \frac{1}{\beta^2} \right) \cdot \log \frac{k + I + I^+}{k + I - I^-} \\ \quad - \frac{I^+ - I^-}{I \beta^2} \left( \frac{7}{30} \frac{k^2}{I^2} + \frac{k}{I} + \frac{79}{30} - \frac{2}{5} \beta^2 + \frac{I}{2k} - \frac{1}{10} \frac{I^2}{k^2} \right) \\ \quad \left. - \frac{I^+ + I^-}{I \beta} \left( \frac{4}{15} \frac{k}{I} + 1 + \frac{1}{10} \frac{I}{k} \right) \right]. \end{array} \right.$$

Dabei ist

$$I^\pm = \sqrt{(j \pm k)^2 + x^2}.$$

Es ist sofort ersichtlich, daß  $G^+ + G^-$  mit (31) übereinstimmt, dagegen scheint  $G^+ + G'$  nicht so einfach. Von Interesse ist jedoch hauptsächlich das Verhalten jenes Ausdrucks für große  $k$ -Werte, so daß es zweckmäßig ist, nach Potenzen von  $I/k$  und  $j/k$  zu entwickeln. Es ist näherungsweise:

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} I^+ + I^- = 2k + \frac{I^2}{k} - \frac{j^2}{k} + \dots; \quad I^+ - I^- = 2j - \frac{jI^2}{k^2} + \frac{j^3}{k^3} + \dots; \\ \log \frac{k \mp I + I^\pm}{k \mp I + I^-} = \frac{j}{k} \pm \frac{Ij}{2k^2} + \frac{5}{6} \frac{j^3}{k^3} - \frac{1}{2} \frac{jI^2}{k^3} + \dots. \end{array} \right.$$

Setzt man dies in (42) ein, so erhält man ein erstaunlich einfaches Ergebnis, nämlich

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} G^+ = \frac{e^2}{12\pi c} \beta \int dk g(k) \left( 1 + \frac{2I}{k} \right) + \left\{ \begin{array}{l} \text{auch für } R = 0 \\ \text{konvergente Integrale,} \end{array} \right. \\ G' = \frac{e^2}{12\pi c} \beta \int dk g(k) \left( -1 + \frac{2I}{k} \right) + \left\{ \begin{array}{l} \text{auch für } R = 0 \\ \text{konvergente Integrale.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Also wird:

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_L(j) = |\mathcal{G}_L(j)| = \frac{e^2}{3\pi c} I \beta \int \frac{dk}{k} g(k) + \dots \\ \quad = \frac{e^2 m}{3\pi \hbar} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \int \frac{dk}{k} g(k) + \dots \end{array} \right.$$

Gl. (44) bestätigt übrigens die auf S. 688 ausgesprochene Behauptung, daß die mit  $1/R^2$  und  $1/R^3$  gehenden Terme von (31) allein auf die negativen Zwischenzustände zurückzuführen sind.

Ohne auf deren Berechnung einzugehen, mögen auch die löchertheoretischen Werte der anderen in § 5 besprochenen Größen angegeben werden. Die Selbstenergie ist der von Weisskopf be-

rechnete Ausdruck<sup>1)</sup>. Man erhält, zusammengestellt, für jeden der fraglichen Ausdrücke eine Darstellung der Form

$$\frac{e^2}{2\pi} \int dk g(k) [A + B(L^+ + L^-) + C(L^+ - L^-) + D(I^+ + I^-) + E(I^+ - I^-)],$$

wobei

$$L^\pm = \log \frac{k \pm I + I^+}{k \pm I + I^-}$$

gesetzt wurde. Die Koeffizienten  $A$  bis  $E$  stellen wir in dem folgenden Schema zusammen:

	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
$E_L^{(1)}$	$2 \frac{k}{I}$	$\frac{I}{j} - \frac{j}{I}$	0	0	$-\frac{k}{jI}$
$W_L^{(1)}$	$4 \frac{k}{I}$	$\frac{k^2}{Ij} + \frac{2I}{j}$	$\frac{2k}{j}$	$-\frac{1}{I}$	$-2 \frac{k}{jI}$
$cP_L^{(1)}$	$2 \frac{k}{j}$	$\frac{2I^2}{j^2} - 2$	$\frac{kI}{j^2} - \frac{k}{I}$	$-\frac{1}{j}$	$-\frac{I}{kj^2}$
$cG_L^{(1)}$	$6 \frac{k}{j}$	$\frac{k^2}{j^2} + \frac{3I^2}{j^2} - 1$	$\frac{3kI}{j^2} - \frac{k}{I}$	$-\frac{2}{j}$	$-\frac{2k}{j^2} - \frac{I^2}{kj^2}$

Unter Benutzung der Entwicklungsformeln (43) ergibt sich hieraus sofort:

$$\overline{E_L^{(1)}} = \frac{e^2}{\pi} \int \frac{dk}{k} g(k) \cdot \frac{3}{2} \left( I - \frac{j^2}{I} \right), \quad \overline{W_L^{(1)}} = \frac{e^2}{\pi} \int \frac{dk}{k} g(k) \left( I + \frac{1}{3} \frac{j^2}{I} \right),$$

$$c\overline{P_L^{(1)}} = \frac{e^2}{\pi} \int \frac{dk}{k} g(k) (-j), \quad c\overline{G_L^{(1)}} = \frac{e^2}{\pi} \int \frac{dk}{k} g(k) \frac{j}{3}.$$

### § 7. Diskussion zur Löchertheorie

Die wichtigste Frage, die nun zu beantworten wäre, ist, ob die (in § 4 wegen der negativen Zustände als wenig sinnvoll erkannte) quasistationäre Darstellung von  $\overline{G}$  nicht im Rahmen der Löchertheorie besser begründet werden kann. Dazu bedarf es wieder der Betrachtung eines äußeren Feldes. Nun ist aber wohlbekannt, daß gerade dies gleich zur Kernschwierigkeit der Löchertheorie führt —

1) Unserem  $E_L^{(1)}$  entspricht bei Weisskopf  $E_S + E_D$ , dabei ist die in Anm. 1, S. 696 mitzitierte Berichtigung zu beachten und außerdem der Faktor von  $E_S$  an Stelle von  $(2m^2c^2 + p_0^2)$  als  $2m^2c^2 + \frac{4}{3}p_0^2$  richtig zu stellen. Der hier benutzte unentwickelte Ausdruck für  $E_S$  (der auch in  $\overline{W_L^{(1)}}$  additiv auftritt) ist der Weisskopfschen Rechnung entnommen, weicht aber von der dort (S. 34, unten) angegebenen Form dadurch ab, daß wir zu seiner Rechnung andere Integrationsvariablen eingeführt haben ( $p + p_0 \rightarrow p'$ ), was wegen der Divergenz von  $E_S$  zu einer Darstellung des Resultats führt, die in den konvergenten Zusätzen von der Weisskopfschen abweicht.

gibt doch selbst im Vakuum eine äußere Kraft zu einer Polarisation Anlaß, die in den direkteren Formulierungen der Löchertheorie unendlich wird<sup>1)</sup>. Nach Dirac<sup>2)</sup> und Heisenberg<sup>3)</sup> besteht formal die Möglichkeit, diese Divergenzen fortzusubtrahieren, doch wurde ein Versuch, den dazu nötigen verwickelten Formalismus auf die hier interessierende Spezialfrage anzuwenden, nicht unternommen.

(Es scheint überhaupt fraglich, ob es einen Sinn hat, zwar die bisherigen Eigenkraftvorstellungen beizubehalten, dagegen die Polarisationseffekte zu eliminieren zu suchen.)

Wenn man nun aber auf eine präzise Formulierung dessen verzichtet, was man in der Löchertheorie unter einer äußeren Kraft verstehen soll, erscheint es hoffnungslos, eine Bewegungsgleichung zu diskutieren, daher auch eine elektromagnetische Masse streng zu definieren. Trotzdem mögen hier einige qualitative Betrachtungen darüber angeschlossen werden.

Sofern man überhaupt hoffen soll, zu einer befriedigenden Formulierung der Löchertheorie zu gelangen, ohne eine gleichzeitige Neugestaltung unserer Selbstenergievorstellungen, scheint es aus allgemeinen dynamischen Gründen klar, daß der Feldimpuls  $\bar{G}$ , wie er oben berechnet wurde, für das Phänomen der elektromagnetischen Trägheit wird maßgebend sein müssen; und man muß wohl von der Theorie erwarten, daß, wenigstens für Kräfte, für die  $|\bar{h}| \ll z$  gilt, in ihr die quasistationäre Rechenweise berechtigt ist. In der Tat bestehen auch formal Hinweise darauf, daß die in § 4 durchgeföhrten Abschätzungen hier gerade in entsprechendem Maße günstiger werden. Die ungeheuer einschneidende Forderung (34) rührte ja einzig daher, daß Übergänge aus dem positiven ins negative Spektrum unter gleichzeitiger Emission eines Photons stattfanden. Solche treten aber in der entsprechenden Näherung der Löchertheorie überhaupt nicht auf. Die umgekehrten Übergänge vom negativen zum positiven Spektrum unter Photonenemission kommen zwar sehr wohl vor — sie liefern gerade die „löchertheoretischen Ergänzungen“, stören aber auch nicht. Die darin auftretenden Resonanznennen

$$\sqrt{|\bar{j} - \bar{h}|^2 + z^2} + \sqrt{|\bar{j}|^2 + z^2} + k$$

verhalten sich [wie übrigens schon am Divergenzgrad von  $\bar{G}'(\bar{j})$  erkennbar] wie die in § 4 diskutierten Nenner  $\mu$  des *positiven* Spektrums.

1) R. Peierls, Proc. Roy. Soc. **146**. S. 420. 1930.

2) P. A. M. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc. **30**. Pt. II. S. 150. 1934.

3) W. Heisenberg, Ztschr. f. Phys. **90**. S. 209. 1934.

Betrachten wir nun, unter formaler Zurückstellung aller „Polarisationsterme“, nur den Teil der (schwachen!) äußeren Störung, der Übergänge innerhalb des positiven Spektrums allein induziert:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} (e\widetilde{V})_p = e \int dX \psi_p^\dagger V(\xi) \psi_p, \\ \psi_p = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\varrho=1,2} \int dJ \mathbf{a}_\varrho(j) \boldsymbol{\varphi}^e(j, \xi), \\ \psi_p^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\varrho=1,2} \int dJ \mathbf{a}_\varrho^\dagger(j) \boldsymbol{\varphi}^{e*}(j, \xi), \end{array} \right.$$

dann lassen sich, genau wie früher, als wesentliche Beiträge dieser Störung zu  $\widetilde{V}$  jene heraussuchen, die die quasistationäre Darstellung geben. Die Abschätzung der Kleinheit der anderen Terme verläuft ebenso günstig, wie früher im positiven Spektrum. Man kann diese Abschätzung auch ohne die Beschränkung auf den Teil (46) der Störung zu machen suchen, und es ist leicht, qualitativ zu überblicken, daß hier die fortgelassenen „Strahlungsdämpfungsterme“ für  $R = 0$  keine Unendlichkeiten enthalten. Die Schwierigkeit hierbei beruht aber darauf, daß neben allen den  $a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(2)}, d^{(2)}$ , die früherem entsprechen, noch viele weitere — und zwar schon im Vakuum — auftreten, und die Polarisation bewirken, die ja (im Grunde schon wegen der unendlichen Anzahl beteiligter Elektronen) unendlich wird. Diese Terme sind aber von dem schon durch (46) allein gegebenen Trägheitsterm formal ganz getrennt, wobei aber natürlich diese Betrachtungsweise daran gebunden ist, daß die Störung so schwach ist, daß noch eindeutig ein positives und ein negatives Spektrum unterscheidbar sind.

Unter diesen Vorbehalten hat man als (transversale) elektromagnetische Masse in der Löchertheorie nach (17) und (45) den Ausdruck

$$(47) \quad \frac{e^4}{3\pi\hbar c} \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \int \frac{dk}{k} g(k) + \dots$$

anzusehen, an dem übrigens die einfache Geschwindigkeitsabhängigkeit der üblichen relativistischen Formel auffällt. [Wegen des Faktors  $g(k)$  bedeutet dies aber nicht wirklich eine invariante Darstellung von (47)!]

Vom Elektronenradius hängt diese „Masse“ offenbar logarithmisch ab.

#### § 8. Einige Bemerkungen zur Bewegungsgleichung im kraftfreien Fall

In dem Falle, daß keine äußere Störung wirkt, waren die Ausdrücke (30) bzw. (41) für den Feldimpuls die exakten, in der Näherung  $\sim e^2$  sich er-

gebenden Werte. Weitere Vernachlässigungen wurden erst bei der Einführung der äußeren Störung begangen.

Für das Problem der elektromagnetischen Masse hat der kraftfreie Fall kein sonderliches Interesse, es mögen über ihn jedoch hier noch einige Bemerkungen angeschlossen werden. Ganz allgemein galt der Zusammenhang

$$-\frac{d}{dt} \mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{R}^{(i)}},$$

mit

$$\mathfrak{R}^{(i)} = e (\mathfrak{E} + [\vec{a}, \vec{\mathfrak{h}}])$$

im gewöhnlichen Formalismus, und

$$\mathfrak{R}^{(i)} = e \int dX \psi^* (\mathfrak{E} + [\vec{a}, \vec{\mathfrak{h}}]) \psi$$

im Formalismus der gequantelten Wellen. Im kraftfreien Fall ist daher

$$\mathfrak{G} + \mathfrak{p} = \text{const.}$$

wo  $\mathfrak{p}$  den Teilchenimpuls

$$\mathfrak{p} = \frac{\hbar}{i} \text{grad} - \frac{e}{c} \mathfrak{A},$$

bzw.

$$\mathfrak{p} = \int dX \psi^* \left( \frac{\hbar}{i} \text{grad} - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right) \psi$$

bedeutet. Im kraftfreien Fall der klassischen Theorie gilt überdies, daß  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{p}$  einzeln erhalten bleiben; daß dies beim Diracelektron nicht allgemein wahr ist, zeigte Gl. (28), die ein zeitabhängiges  $\mathfrak{G}$  ergab. Daß im allgemeinsten Fall, in dem im anfänglichen Wellenpaket positive und negative Niveaus (mit gleichem Impuls) nebeneinander vertreten sind, keine Erhaltung des materiellen sowie des Feldimpulses einzeln gelten kann, ist schon nach Schrödingers<sup>1)</sup> Befunden über die Zitterbewegung selbstverständlich. Wie eng die auftretende Kraft mit dem „Zitterstrom“ verknüpft ist, zeigt ihr Wert, den wir hier ohne Beweis angeben. Im kraftfreien Fall ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^{(i)} &= \frac{\hbar e^2}{2 \pi m c} \int dk k^2 g(k) \sqrt{1 - \beta^2} \left[ \mathfrak{B} \left( \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - \frac{2}{\beta^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathfrak{n}(\mathfrak{n}, \mathfrak{B}) \left( \frac{3 - \beta^2}{\beta^2} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - \frac{6}{\beta^2} \right) \right] \\ &= \frac{\hbar e^2}{\pi m c} \cdot \int dk k^2 g(k) \left[ -\frac{2}{3} \mathfrak{B} + \beta^2 \left( \frac{1}{5} \mathfrak{B} - \frac{4}{15} \mathfrak{n}(\mathfrak{n}, \mathfrak{B}) \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

wobei

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{j}, \quad \mathfrak{B} = i \left[ \left\{ \varphi^{(+)*} \vec{a} \varphi^{(-)} \right\} e^{2i\omega t} - \left\{ \varphi^{(-)*} \vec{a} \varphi^{(+)} \right\} e^{-2i\omega t} \right]$$

und

$$\omega = c \sqrt{j^2 + \mathfrak{x}^2}$$

gesetzt wurde. Dabei haben wir uns auf den Fall einer ebenen Welle (ein  $j$ -Wert, aber beide zugehörigen Energiewerte!) beschränkt. Es ist  $\mathfrak{B} \cdot \frac{1}{2\omega}$  direkt die Ableitung der Zitterstromdichte. ( $\varphi^{(+)}$  und  $\varphi^{(-)}$  stellen die zur Energie  $+ \hbar\omega$  bzw.  $- \hbar\omega$  gehörenden Bestandteile der Welle dar.)

Bemerkenswert ist wieder die Proportionalität dieses Ausdrucks mit  $1/R^3$ ; ein physikalischer Sinn dürfte ihm wohl nicht zukommen.

1) E. Schrödinger, vgl. Anm. 1, S. 687.

Wenn man sich aber auf positive Ausgangsniveaus beschränkt, oder Löchertheorie treibt, so bekommt man, wie wir früher sahen, in Übereinstimmung mit der klassischen Theorie im kraftfreien Fall ein konstantes  $\bar{G}$ , daher also verschwindende Eigenkraft. Dies kann man natürlich auch durch direktes Ausrechnen von  $\mathfrak{A}^{(i)}$  prüfen; da man dabei zu einigermaßen bemerkenswerten Feststellungen gelangt, möge darüber kurz berichtet werden. Zunächst besprechen wir den nicht-löchertheoretischen Fall.

Hat man irgendeine Feldgröße, die (bei endlichem  $L$ ) die Fourierdarstellung

$$\mathfrak{F} = \sum_{s, \sigma} \left( f_\sigma(s) A_{s\sigma} e^{+i(s, t)} + f_\sigma^\dagger(s) A_{s\sigma}^\dagger e^{-i(s, t)} \right)$$

erlaubt, wobei  $f_\sigma(s)$  noch die  $\alpha$ -Matrizen enthalten darf, so ergibt die Störungsrechnung im zitterbewegungsfreien Fall der Näherung  $\sim e^2$  ganz allgemein (für die ebene Welle):

$$\overline{e \mathfrak{F}} = \frac{e^2}{(2\pi)^2} \sum_\sigma \int dK \frac{g(k)}{k} \sum_{\substack{\sigma' = 1, 2 \\ \sigma = 1, 2}} \frac{\left\{ u^{\sigma*}(j) \left[ \left( -k + (\vec{\alpha}, t) \right) (\vec{\alpha}, e_\sigma) + 2(e_\sigma, j) \right] f_{\sigma'}^\dagger(t) \right.}{2(kI - (t, j))} \\ \left. + f_\sigma(t) \cdot \left[ (\vec{\alpha}, e_\sigma) \left( -k + (\vec{\alpha}, t) \right) + 2(e_\sigma, j) \right] u^{\sigma'}(j) \right\}$$

als Erwartungswert von  $e \mathfrak{F}$  am Teilchenort.

Setzen wir hier  $e \mathfrak{F} \rightarrow e \mathfrak{E}$ , also  $f_\sigma \rightarrow +ik e_\sigma$ ,  $f_\sigma^\dagger \rightarrow -ik e_\sigma$  einerseits;  $e \mathfrak{F} \rightarrow e[\vec{\alpha}, \mathfrak{H}]$ , also  $f_\sigma \rightarrow +i[\vec{\alpha}, [t, e_\sigma]]$ ,  $f_\sigma^\dagger \rightarrow -i[\vec{\alpha}, [t, e_\sigma]]$  andererseits, so bekommen wir sofort:

$$e \mathfrak{E} = -e[\vec{\alpha}, \mathfrak{H}] = \frac{e^2}{\pi m c} \cdot \int dk k^2 g(k) \cdot [n, \mathfrak{s}] \sqrt{1 - \beta^2} \left( \frac{1}{\beta^2} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - \frac{2}{\beta} \right)$$

mit

$$\mathfrak{s} = \frac{\hbar}{2} i(\alpha_2 \alpha_3, \alpha_3 \alpha_1, \alpha_1 \alpha_2).$$

Das Verschwinden der Eigenkraft erscheint hier also dadurch bedingt, daß eine mit  $1/R^3$  gehende elektrische Kraft einer entgegengesetzten gleichen magnetischen das Gleichgewicht hält. Selbstverständlich hat aber nur die verschwindende Summe beider physikalischen Interesse; es ist aber doch wohl bemerkenswert, daß das Resultat nicht trivial herauskommt, daß insbesondere die Summation über positive und negative Zwischenzustände zusammen unbedingt nötig ist, um das Verschwinden zu erreichen.

Es scheint hiernach zunächst verwunderlich, daß auch die Löchertheorie, in der jene gemeinsame Summation unmöglich ist, eine verschwindende Eigenkraft liefern soll. Es ergibt sich dies auch hier auf eine keineswegs triviale Weise. Man gelangt zu der Gleichung:

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathfrak{K}^{(i)}} = \sum_a \int dK \frac{g(k)}{k} i \mathfrak{e}_a \\ \cdot \left[ \begin{array}{l} \left( \overrightarrow{a}, \mathfrak{e}_a \right) \left( \overrightarrow{a}, t \right) (I(j-t) - I(j) + k) \\ - \left( \overrightarrow{a}, \mathfrak{e}_a \right) (kI - (t, j)) + (\mathfrak{e}_a, j) (k - (\overrightarrow{a}, t)) u^a \end{array} \right] \\ - \left[ \begin{array}{l} \left( \overrightarrow{a}, \mathfrak{e}_a \right) \left( \overrightarrow{a}, t \right) (I(j-t) + I(j) + k) \\ - \left( \overrightarrow{a}, \mathfrak{e}_a \right) (kI + (t, j)) + (\mathfrak{e}_a, j) (k + (\overrightarrow{a}, t)) u^a \end{array} \right] \end{array} \right]. \end{array} \right.$$

In früherer Bezeichnungsweise ist der erste Summand das  $\overline{\mathfrak{K}^{(i)}}^+$ , der zweite die „Ergänzung“  $\overline{\mathfrak{K}^{(i)}}^-$ . Der Wert der Summe beider ist hier aber in der Tat Null, was man dann erkennt, wenn man wieder (29a) anwendet. Man sieht daraus wieder, daß einfaches Streichen der negativen Zwischenzustände unzulässig, und die „löchertheoretische Ergänzung“ durchaus wesentlich ist, schon um im kraftfreien Fall vernünftige Resultate zu bekommen. Um das Verschwinden von (48) zu erreichen, ist im übrigen auch wieder eine Zusammenfassung der Beiträge von  $e \mathfrak{E}$  und  $e[\overrightarrow{a}, \mathfrak{H}]$  nötig, die für sich nicht verschwinden.

### § 9. Ergänzungen

Die im Vorangehenden ständig zu Hilfe genommene Einführung eines Elektronenradius möge nun etwas näher begründet werden. Es ist zweckmäßig, dies im Rahmen einer vollständigen Quantenelektrodynamik zu tun, und zwar wählen wir dazu die von Dirac, Fock und Podolsky<sup>1)</sup> angegebene „mehrzeitige“ Form. Wir behandeln nur den Fall, daß ein einziges Elektron vorhanden ist; dann tritt in unseren Gleichungen eine Partikelzeit  $t_1$  und die Feldzeit  $t$  auf.

Die Feldgleichungen lauten:

$$(49) \quad \mathcal{A} \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0; \quad \mathcal{A} \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = 0$$

und zwischen den Potentialen bestehen die Vertauschungsrelationen

$$[\Phi(\mathfrak{x}', t') \Phi(\mathfrak{x}, t)] = - \frac{c \hbar}{i} \mathcal{D}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}', t - t');$$

$$[\mathfrak{A}_{i'}(\mathfrak{x}', t') \mathfrak{A}_i(\mathfrak{x}, t)] = \delta_{i'i} \frac{c \hbar}{i} D(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}', t - t');$$

$$[\Phi(\mathfrak{x}', t) \mathfrak{A}_i(\mathfrak{x}, t)] = 0.$$

Die Wellenfunktion  $\psi$  genügt der Diracgleichung

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} + H_1 \right) \psi = 0, \\ \text{mit} \quad H_1 = \frac{\hbar c}{i} (\overrightarrow{a}, \text{grad}) + \beta m c^2 + e \{ \Phi(\mathfrak{x}_1, t_1) - e (\overrightarrow{a}, \mathfrak{A}(\mathfrak{x}_1, t_1)) \}, \end{array} \right.$$

1) P. A. M. Dirac, V. A. Fock u. Boris Podolsky, Phys. Ztschr. Sow.-Union 2. S. 468. 1932.

und der „Nebenbedingung“

$$(51) \quad \left( \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \psi = e D(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1, t - t_1) \psi.$$

In der relativistisch invarianten Formulierung bedeutet  $D(\rightarrow \mathcal{A})$  die „invariante Deltafunktion“ von Jordan und Pauli<sup>1)</sup>, es läßt sich aber leicht verifizieren, daß alle bei Dirac, Fock und Podolsky zur Begründung der Theorie gemachten Schlüsse, mit Ausnahme des Invarianzbeweises, sich übertragen lassen auf den Fall, daß man unter  $D(\mathfrak{x}, t)$  eine reguläre Funktion versteht, für die die folgenden Zusammenhänge gelten:

$$D(\mathfrak{x}, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int dK \frac{g(k)}{k} \sin((\mathfrak{k}, \mathfrak{x}) - k c t), \quad (g(u) = g(-u)),$$

$$(g(0) = 1),$$

$$-\frac{1}{4\pi c} \left( \frac{\partial D}{\partial t} \right)_{t=0} = \partial_3(\mathfrak{x}) \quad \text{mit} \quad \partial_3(\mathfrak{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dK g(k) \cos(\mathfrak{k}, \mathfrak{x}) \quad \text{und}$$

$$D(\mathfrak{x}, t) = \frac{1}{|\mathfrak{x}|} \left( \partial(|\mathfrak{x}| + c t) - \partial(|\mathfrak{x}| - c t) \right)$$

mit

$$\partial(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du g(u) \cos(ux).$$

Setzt man  $g \equiv 1$ , so bekommt man die übliche invariante Theorie, wir lassen aber  $g$  beliebig, und verlangen nur, daß die gewählte Form dieser Funktion die Konvergenz aller obigen Integrale gewährleistet.

In der mehrzeitigen Quantenelektrodynamik wird eine explizite Be- trachtung der Feldenergie  $W$  umganger. Man kann sie aber leicht durch die Forderung einführen, das

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [W \Phi]; \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [W \mathfrak{A}]$$

sein soll, und daß hieraus die Wellengleichungen (49) folgen. Geht man zum Impulsraum über, so ist leicht zu erkennen, daß dies gerade dann gilt, wenn man für  $W$  die früher benutzte Form (20) ansetzt. Der Erhaltungssatz (35) ist dann auch unschwer ableitbar, aber  $W$  erscheint im Ortsraum nicht einfach durch die Feldstärken  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  darstellbar. Eine Darstellung gelingt, wenn man Größen  $\Phi'$  und  $\mathfrak{A}'$  einführt, für die die Relationen

$$[\Phi'(\mathfrak{x}', t') \Phi(\mathfrak{x}, t)] = -\frac{e\hbar}{i} \mathcal{A}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}', t - t') \quad \text{usw.}$$

erfüllt sind, dann wird nämlich

$$W = \frac{L^3}{2\pi} \sum_{s \sigma} \frac{k_s^2}{g(k_s)} A_{s \sigma}^* A_{s \sigma} = \frac{1}{8\pi} \int dX ((\mathfrak{E}, \mathfrak{E}) + (\mathfrak{H}, \mathfrak{H})).$$

1) P. Jordan u. W. Pauli, Ztschr. f. Phys. 47. S. 151. 1928.

$$\left[ \mathcal{A} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{dK}{k} \sin((\mathfrak{k}, \mathfrak{x}) - k c t) \right].$$

Entsprechend wird der Impulserhaltungssatz durch die Größe

$$\mathfrak{G} = \frac{L^3}{2\pi c} \sum_{s\sigma} \frac{k_s \mathfrak{k}_s}{g(k_s)} A_{s\sigma}^+ A_{s\sigma}^- \left[ = \frac{1}{8\pi c} \int dX ([\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] + [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}']) \right]$$

erfüllt. Damit sind bereits alle früher benutzten Ansätze in einen geschlossenen Formalismus eingereiht, es möge aber noch einiges bemerkt werden zur Erläuterung, daß die hier benutzte Form der üblichen<sup>1)</sup> Einführung des Elektronenradius ganz entspricht.

Wenn zu einer beliebigen, durch

$$\mathbf{F}(\mathfrak{x}) = \sum_s F_s e^{i(\mathfrak{k}_s, \mathfrak{x})} + F_s^\dagger e^{-i(\mathfrak{k}_s, \mathfrak{x})}$$

darstellbaren Größe  $\mathbf{F}$  eine zweite

$$\hat{\mathbf{F}} = \sum_s g(k_s)^{-1/2} (F_s e^{i(\mathfrak{k}, \mathfrak{x})} + F_s^\dagger e^{-i(\mathfrak{k}, \mathfrak{x})})$$

definiert wird, so gilt allgemein:

$$F(\mathfrak{x}) = \int dX' \hat{\mathbf{F}}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') \hat{\mathbf{F}}(\mathfrak{x}'),$$

wo  $\hat{\mathbf{F}}(\mathfrak{x})$  dem früheren  $\hat{\mathbf{F}}_s(\mathfrak{x})$  ganz ähnlich ist, aber mit  $g^{1/2}$  statt mit  $g$  gebildet ist (vgl. unten!). Geben wir nun von den Potentialen  $\Phi$  und  $\mathfrak{A}$  zu den nach (52) gebildeten  $\hat{\Phi}$  und  $\hat{\mathfrak{A}}$  über, so erfüllen diese die Vertauschungsrelationen mit der singulären  $\mathcal{A}$ -Funktion:

$$[\hat{\Phi}(\mathfrak{x}', t'), \hat{\Phi}(\mathfrak{x}, t)] = - \frac{c\hbar}{i} \mathcal{A}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}', t - t'),$$

$$[\hat{\mathfrak{A}}_\nu(\mathfrak{x}', t'), \hat{\mathfrak{A}}_\nu(\mathfrak{x}, t)] = \delta_{\nu\nu} \frac{c\hbar}{i} \mathcal{A}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}', t - t'),$$

$$[\hat{\Phi}(\mathfrak{x}', t'), \hat{\mathfrak{A}}_\nu(\mathfrak{x}, t)] = 0;$$

aus den Gl. (50) und (51) wird aber:

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + H_1 \right) \psi = 0, \quad \text{mit} \quad H_1 = \frac{\hbar c}{i} (\vec{a}, \text{grad}) + \beta m c^3 \\ \quad + e \int dX' \hat{\mathbf{F}}_s(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}') \{ \hat{\Phi}(\mathfrak{x}', t_1) - (\vec{a}, \hat{\mathfrak{A}}(\mathfrak{x}', t_1)) \} \\ \quad \text{und} \\ \left( \text{div } \hat{\mathfrak{A}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} \right) \psi = e \hat{D}(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1, t - t_1) \psi. \end{array} \right.$$

Dabei ist also

$$\hat{\mathbf{F}}_s(\mathfrak{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dK g^{1/2}(k) \cos(\mathfrak{k}, \mathfrak{x}),$$

und

$$\hat{D}(\mathfrak{x}, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{dK}{k} g^{1/2}(k) \sin((\mathfrak{k}, \mathfrak{x}) - k c t).$$

1) Vgl. den in Anm. 2 S. 674 zitierten Handbuchartikel von W. Pauli, S. 271.

Da ferner  $\hat{\Phi}$  und  $\hat{\Psi}$  ebenso wie  $\Phi$  und  $\Psi$  den Wellengleichungen (49) genügen, ist die Identität unseres Formalismus (S. 708, 709) mit dem üblichen Vorgehen nachgewiesen. Die Form der Gl. (53) und der Erhaltungssätze, die nun folgende Gestalt bekommen:

$$\begin{aligned} -\frac{dW}{dt} &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{8\pi} \int dX (\hat{\mathcal{E}}^z + \hat{\mathcal{H}}^y) \right) = e \int dX \hat{\partial}_3 (\xi_1 - \xi) (\vec{a}, \hat{\mathcal{E}}(\xi, t_1)) \\ -\frac{d\mathcal{G}}{dt} &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi c} \int dX [\hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{H}}] \right) \\ &= e \int dX \hat{\partial}_3 (\xi_1 - \xi) \left[ \hat{\mathcal{E}}(\xi, t_1) + [\vec{a}, \hat{\mathcal{H}}(\xi, t_1)] \right], \end{aligned}$$

läßt offenbar eine Interpretation von  $\hat{\partial}_3(\xi)$  als „Gestaltfunktion“ des Elektrons unmittelbar zu. Praktisch am bequemsten gibt man wohl  $g(k)$  die Form:

$$g(k) = e^{-\frac{k^2 R^2}{2}}.$$

Dann ist

$$\hat{\partial}_3(\xi) = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{R^3} e^{-\frac{|\xi|^2}{R^2}}$$

und die früher vorkommenden Integrale haben folgende Werte:

$$(54) \quad \int_0^\infty dk g(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{R}; \quad \int_0^\infty dk k g(k) = \frac{1}{R^2}; \quad \int_0^\infty dk k^3 g(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{R^3}.$$

Das der Löchertheorie eigentümliche Integral  $\int_{k_0}^\infty \frac{dk}{k} g(k)$  läßt sich nicht

elementar berechnen, es ist aber leicht abzuschätzen, daß es wirklich für  $R \rightarrow 0$  unendlich wird wie  $C \log R$ .

Selbstverständlich würde irgendeine andere Wahl von  $g$  zur Folge haben, daß die konstanten Faktoren in den Gl. (54) etwas modifiziert würden, doch ist ja in jedem Falle schon aus Dimensionsgründen klar, daß die Integrale der ersten, zweiten usw. Potenz einer durch die Wahl von  $g$  gegebenen reziproken Länge proportional sein müssen, welche wir dann als Elektronenradius deuten könnten.

Um nun noch unsere „Abschneidevorschrift“ mit der Methode der gequantelten Wellen des § 6 vereinigen zu können, muß man nur die Gl. (50) bis (51) ersetzen durch

$$\left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} + H_1 \right) \Psi = 0; \quad H_1 = \int dX' \Psi^\dagger(\xi') \left[ \frac{\hbar c}{i} (\vec{a}, \text{grad}') + (\beta mc^2) \right. \\ \left. + e \{ \Phi(\xi', t_1) - (\vec{a}, \mathcal{A}(\xi', t_1)) \} \right] \Psi(\xi'),$$

und

$$\left( \text{div} \mathcal{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \Psi = \left[ e \int dX' \Psi^\dagger(\xi') D(\xi - \xi', t - t_1) \Psi(\xi') \right] \Psi$$

was, wie leicht nachzuprüfen, die konsequente Vereinigung des Formalismus der mehrzeitigen Theorie mit der Hyperquantelung darstellt. Diese Synthese leidet freilich an der Unsymmetrie, daß zwar für die Potentiale vier-, für den  $\Psi$ -Operator aber nach (37) nur dreidimensionale Vertauschungsrelationen benutzt werden. Darauf kann aber nicht eingegangen werden.

G. Wentzel<sup>1)</sup> hat im Rahmen der mehrzeitigen Theorie ein Verfahren angegeben, das im klassischen Falle die unendliche Selbstenergie des Punktelektrons zu eliminieren gestattet, beim Diracelektron aber versagte, da dort der Divergenzgrad höher war. Speziell bei den Rechnungen im Impulsraum erfordert die Anwendung dieses Formalismus' keinerlei Umstände<sup>2)</sup>. Es erscheint daher sehr naheliegend, ihn in der Löchertheorie anzuwenden, wo der nur logarithmische Divergenzgrad charakteristisch ist. Auf Grund einer ganz einfachen, mir von Herrn Prof. Wentzel freundlichst mitgeteilten, Abschätzung ergibt sich aber, daß auch in diesem Falle die Unendlichkeiten so nicht beseitigt werden können. Das Verfahren ist in seiner Wirksamkeit ganz auf den Fall *linearer* Divergenzen beschränkt, hätte also hier keinerlei Vorteile gebracht, und ist daher nicht berücksichtigt worden.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. G. Wentzel, danke ich zum Schlusse herzlichst für die Anregung zu dieser Arbeit und für den während ihrer Ausführung immerfort so liebenswürdig erteilten Rat.

1) G. Wentzel, Ztschr. f. Phys. 86. S. 479, 635. 1933; 87. S. 726. 1934.

2) Es muß in unseren Schlußformeln nur überall der Faktor  $I_{s,\varepsilon}(c k)$  (vgl. Wentzel II, S. 644) unter den Integralen hinzugefügt werden. Quantenmechanisch erscheint übrigens die Rechnung im Impulsraum als einzig rationell mögliche. Das bei Wentzel (I) im klassischen Grenzfall benutzte Verfahren im Ortsraum scheitert von vornherein daran, daß die dortige Gl. (19) wegen der Nichtvertauschbarkeit von  $(\Phi)_{\xi_1 + \tau}$ ;  $(\mathfrak{A})_{\xi_1 + \tau}$  mit  $H_1^0$  nicht mehr gilt.

Zürich, Physik. Institut der Universität, den 25. Januar 1935.

(Eingegangen 28. Februar 1935)

V  
2  
2

1  
9  
3  
5

XUN



## STABILISATOR



mit einer Stromquelle beliebiger Art gibt eine Spannungskonstanz:  $\pm 0,1\%$  bei  $\pm 10\%$  Primärschwankungen,  $1-2\%$  zwischen Leerlauf und Vollast.  $0,02\%$  ist nur die gegenseitige Beeinflussung der Teillspannungen. Trägheitslose Regelung durch Glimmentladung. Eigenverbrauch: Einige Milliampère.



Ausführliche Beschreibungen kostenlos.

STABILOVOLT G.m.b.H., Berlin-Tempelhof, Lorenzweg 1. Tel. Südring 7630

## Die chemische Emissionsspektralanalyse

### I. Teil: Grundlagen und Methoden

Von Prof. Dr. Walther Gerlach, München, und Dipl.-Ing. Dr. E. Schweizer, Frankfurt a.M. VI, 120 Seiten mit 53 Figuren im Text. 1930. gr. 8°. V. Kart. RM. 11.34

Zeitschrift für physikalische Chemie: Das Buch ist flüssig und leichtverständlich geschrieben und enthält eingehende Angaben über die zur Ausführung der Spektralanalyse erforderlichen Apparate, den Gang der Untersuchung, die dabei gemachten praktischen Laboratoriumserfahrungen usw. Inhalt wie Ausstattung lassen nichts zu wünschen übrig. Das Buch kann daher warm empfohlen werden. Riesenfeld.

### II. Teil: Anwendung in Medizin, Chemie und Mineralogie

Von Prof. Dr. Walther Gerlach, München, und Prof. Dr. Werner Gerlach, Basel. VIII, 191 Seiten mit 73 Figuren im Text. 1933. gr. 8°. V. Kart. RM. 13.—

Zeitschrift für angewandte Chemie: Das Buch birgt eine außerordentliche Fülle von Erfahrungen, an denen niemand vorübergehen kann, der die Spektralanalyse, sei es im wissenschaftlichen Laboratorium, sei es im Betrieb, verwendet.

## Grenzen der elektrischen Messung

nebst Nachbargebieten. Vorträge auf dem 9. Deutschen Physiker- und Mathematikerstag in Würzburg 1933, gehalten von M. v. Ardenne, H.-J. v. Braunmühl, E. Brüche, L. Cremer, M. Czerny, H. Ewest, R. Feldkeller, E. Franz, H. Hoyer, G. Jäckel, W. Janovsky, H. Johansson, L. Kettenacker, R. Köhler, J. Kröner, K. Küpfmüller, E. Meyer, H. Plendl, L. Pungs, A. Ramspeck, L. Rhode, H. Rieche, O. Scherzer, G. Stein, R. Tamm, F. Tredelenburg, R. Vieweg, O. Wieland auf Veranlassung der Deutschen Physikal. Gesellschaft, der Deutschen Gesellschaft für technische Physik und der Heinrich-Hertz-Gesellschaft zur Förderung des Funkwesens. Zusammengestellt von W. Hort und F. Moench.

(Bildet mit einem Vortrag von Joh. Stark „Über die Organisation der Physikalischen Forschung“ einen Sonderdruck aus der Zeitschrift für technische Physik 1933, Nr. 11.)

90 Seiten mit 179 Abbildungen im Text und auf 5 Tafeln, sowie 1 Tafel mit 12 Filmstreifen. 1933. 4°. RM. 6.—

Aus dem Verzeichnis der Vortragenden geht hervor, daß Grundlegendes zu den Problemen mitgeteilt worden ist. Durch die Sonderausgabe ist auch denen, die die Z. f. techn. Phys. nicht regelmäßig beziehen, Gelegenheit gegeben, die Vorträge zu erwerben.

Das mit V bezeichnete Werk erschien in der Verlagsabteilung Leopold Voss Verlangen Sie bitte mein ausführliches Fachverzeichnis „Naturwissenschaften“ Die Werke können durch jede Buchhandlung bezogen werden

**JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG**

V  
2  
2  
1  
9  
3  
5  
XUM

## Die Grundlagen der Quantenmechanik

Von Dr. Arthur March, Professor für theoretische Physik an der Universität Innsbruck. 2., vollkommen umgearbeitete Auflage von „Theorie der Strahlung und der Quanten“ (1919). VIII, 293 Seiten mit 6 Figuren im Text. 1931. gr. 8°. RM. 21.60, geb. RM. 23.40

**Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure:** Man darf wohl sagen, daß es bisher kein Buch gab, das man dem Anfänger in der Quantenmechanik ohne Einschränkung empfehlen konnte. Das Buch von March ist das erste, das ich kennenerkte, in dem der Verfasser in ausreichendem Maße mit den Schwierigkeiten rechnet, die der Leser finden wird, und in dem er ihnen zu begegnen sucht. Mit Vorsicht und großer Ausführlichkeit werden die mathematischen Hilfsmittel bereitgestellt, deren sich die Quantenmechanik bedient, und die Begriffe erklärt, die den Gegenstand der Theorie bilden.

## Einführung in die Theorie der Wellengleichung

Von Prof. Dr. Harry Schmidt, Köthen und Leipzig. VI, 146 Seiten mit 16 Figuren im Text. 1931. gr. 8°. RM. 10.53

**Physikalische Zeitschrift:** Der Physiker und Techniker wird das Buch mit Nutzen zu Rate ziehen, wenn er sich über die Möglichkeiten zur vollständigen Lösung eines der vielen hier sehr eingehend behandelten Schwingungsprobleme unterrichten will. R. Seeliger.

**Zeitung des Vereins Deutscher Eisenbahnverwaltungen:** Der Verfasser hat die glückliche Gabe, den spröden Stoff bei aller wissenschaftlichen Strenge lebendig und klar darzustellen und das Studium der wichtigen Schwingungsprobleme dadurch wesentlich zu erleichtern.

## Abhandlungen zur Wellenmechanik

Von Prof. Dr. Erwin Schrödinger, Oxford. 2., vermehrte Auflage. X, 198 Seiten mit 14 Figuren im Text. 1928. gr. 8°. RM. 6.12, geb. RM. 7.47

**Physikalische Zeitschrift:** Die in kurzer Zeit berühmt gewordenen Abhandlungen des eigentlichen Begründers der Wellenmechanik erscheinen hier in chronologischer Reihenfolge, zu einem Bande vereinigt. Diese Arbeiten geben ein klar umrissenes Bild über diejenige Richtung in der neuesten Entwicklung der Quantentheorie, die den klassischen Vorstellungen am meisten entgegenkommt und die am meisten vermuten läßt, daß man die Quantenphänomene möglicherweise doch auf Grund feldtheoretischer Anschauungen wird beherrschen können. Lanczos.

Verlangen Sie bitte mein ausführliches Fachverzeichnis „Naturwissenschaften“

Die Werke können durch jede Buchhandlung bezogen werden

---

**JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG**